Tweede deeltentamen GDV NA

Vrijdag 9 januari 2015, 14.00-17.00

Motiveer elk antwoord met een berekening of redenering. Voor dit tentamen kunnen 64 punten worden gehaald.
Het tentamen is voldoende bij 36 punten.

---

1. Beschouw op $[0,1]$ de functie $f(x) = e^{-x}$. De exponentiële Fourierreeks van $f(x)$ is $E(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2i\pi nx}$.

a. Bepaal c_n voor alle $n \in \mathbb{Z}$. (5p)

b. Ga na dat $\overline{c_n} = c_{-n}$ voor alle n en leg uit waarom deze gelijkheid optreedt. (4p)

c. Bepaal voor alle $x \in [0,1]$ de som van de reeks $E(x)$. (4p)

d. Bereken de som van de reeks $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$. (5p)

2. De Fouriergetransformeerde van de functie $\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{als } |x| > 1. \end{cases}$ is $\hat{\chi}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin k}{k}$.

a. Bepaal een functie g met Fouriergetransformeerde $\hat{g}(k) = \frac{\sin 2k}{k}$. (Geef een expliciete vorm voor $g(x)$.) (5p)

b. Bepaal de waarde van de integraal $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k^2} e^{ik}\, dk$. (6p)

***** Op de volgende bladzijde staan nog meer opgaven. *****

3. Gegeven is voor $x \in \mathbb{R}, x > 0$ het randwaardenprobleem

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = f(x), \quad y(0) = a, y'(0) = b.$$

a. Los het randwaardenprobleem op in het geval dat $f(x) = 2x^2$ en $a = 1, b = -1$. Schrijf de oplossing als een reële functie. (9p)

Laat nu $f(x) = \delta(x-c)$ zijn (met $c > 0$) en $a = b = 0$. De bijbehorende oplossing is de Greense functie $G(x, c)$.

b. Toon aan dat $G(x,c) = \begin{cases} 0 & \text{als } 0 \leq x \leq c \\ e^{x-c}\sin(x-c) & \text{als } x > c \end{cases}$. (6p)

c. Geef de oplossing van het randwaardenprobleem

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = \sqrt{x}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

In de uitdrukking voor de oplossing mag een integraalteken voorkomen, verder moeten alle functies expliciet gegeven zijn. (4p)

4. Beschouw de differentiaalvergelijking

$$xy''(x) + (1-x)y'(x) + \lambda y(x) = 0 \qquad (*)$$

voor $\lambda \in \mathbb{R}$. $x = 0$ is een regulier singulier punt.

a. Laat zien dat de differentiaalvergelijking $(*)$ voor alle λ slechts één lineair onafhankelijke Frobeniusreeksoplossing rond $x = 0$ heeft. (6p)

b. Toon aan dat er voor elk natuurlijk getal N ($N = 0, 1, 2, \ldots$) er een λ bestaat zo dat $(*)$ een polynoom van graad precies N als oplossing heeft en geef de bijbehorende waarde λ_N van λ. (4p)

De in (b) gevonden polynomen geven we aan met $p_0, p_1, p_2, \ldots$ (p_N ligt aanvankelijk nog op een constante na vast; door bijvoorbeeld te eisen dat de coëfficiënt van x^N gelijk is aan 1 wordt p_N geheel vastgelegd). $p_0, p_1, p_2, \ldots$ vormen een volledig orthogonaal stel eigenfuncties van een aan de differentiaalvergelijking $(*)$ gerelateerd singulier Sturm-Liouvilleprobleem op $x \geq 0$.

c. Geef expliciet de orthogonaliteitsrelatie voor de polynomen $p_0, p_1, p_2, \ldots$ aan. (6p)