Hertentamen Analyse 3NA

Dinsdag 2 april 2013, 14.00-17.00

Motiveer elk antwoord met een berekening of redenering. Voor dit tentamen kunnen 71 punten worden gehaald.
Het tentamen is voldoende bij 39 punten.

---

1. Gegeven is de functie $g(z) = \dfrac{\cos^2 z}{z + \pi/2}$ voor $z \in \mathbb{C}$.

a. Bepaal de singulariteiten van $g(z)$ en hun aard. (5 pt)

b. Bepaal de eerste drie termen $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ van de machtreeks van $g(z)$ rond $z = 0$. (6 pt)

2. Bereken m.b.v. contourintegratie de waarde van de integraal $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 9i}\, dx$. Schrijf het antwoord in de vorm $a + bi$ met a, b reële getallen. (10 pt)

3a. Bepaal de oplossing van het beginwaardenprobleem

$$3y''(x) - 2y'(x) - y(x) = x^2, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = -1. \qquad (10\text{ p})$$

4. Beschouw voor $\lambda \in \mathbb{R}$ de tweede-orde differentiaalvergelijking (d.v.)

$$2xw''(x) + (3 - 2x)w'(x) + \lambda w(x) = 0.$$

a. Bepaal alle waarden van λ waarvoor de d.v. een (niet-nul) polynoom als oplossing heeft en bepaal de graad van het polynoom. (7 pt)

b. Laat $\lambda = 0$ zijn. Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking. In het antwoord mag hoogstens één integraalteken voorkomen. (7 pt)

Z.O.Z. voor nog meer opgaven.

5. De Fouriergetransformeerde van een voor $x \in \mathbb{R}$ gedefinieerde reële continue functie $J(x)$ wordt gegeven door $\hat{J}(k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} & \text{als } -1 < k < 1 \\ 0 & \text{als } |k| > 1 \end{cases}$

a. Bereken de integralen $\int_{-1}^{1} \frac{\cos kx}{\sqrt{1-k^2}}\,dk$ en $\int_{-1}^{1} \frac{\sin kx}{\sqrt{1-k^2}}\,dk$. Het antwoord mag worden uitgedrukt in termen van de functie $J(x)$. (6 pt)

b. Bepaal de Fouriergetransformeerde $\hat{h}(k)$ van de functie $h(x) = J(2x+1)$. Geef een expliciete uitdrukking voor $\hat{h}(k)$. (6 pt)

6. De Fouriercosinusreeks van een op $[0,4]$ gedefinieerde functie heeft de vorm $A + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos knx$ voor zekere k.

a. Geef de waarde van k. (2 pt)

Beschouw nu verder de functie $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } 0 < x < 2 \\ 1 & \text{als } 2 < x < 4 \end{cases}$.
De Fouriercosinusreeks van $f(x)$ op $[0,4]$ wordt nu gegeven door $A + B\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)} \cos(2m+1)kx$ voor zekere getallen $A, B.$ en met k als in opgave 6a.

b. Bepaal de getallen A en B. (6 pt)

c. Termsgewijs primitiveren van de reeks (op de constante term A na) geeft de reeks $B\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{k(2m+1)^2} \sin(2m+1)kx$. Dit is de sinusreeks van een continue functie $g(x)$ op $[0,4]$. Geef een expliciete uitdrukking voor deze functie $g(x)$. (6 pt)

***** EINDE *****