

## ANALYSE 3

woensdag 21 december 2005, 10:00-13:00

Het gebruikt van een formulekaart en grafische calculator ter ondersteuning is toegestaan. Let wel: eindantwoorden alleen tellen niet, een volledige uitwerking is noodzakelijk.

Succes!

1. Laat voor  $n = 1, 2, \dots$  de rij  $(f_n)$  van functies op  $[0, \infty)$  gegeven zijn door

$$f_n(x) = \frac{x}{(x + (1/n))^n} \quad (x \geq 0).$$

- (a). Onderzoek voor welke  $x \geq 0$  de rij  $(f_n(x))$  convergeert en bepaal voor dergelijke  $x$  de limietwaarde.  
(b). Zij  $t > 1$ . Bewijs dat de rij  $(f_n)$  uniform convergeert op  $[t, \infty)$ .  
(c). Laat zien dat de rij  $(f_n)$  niet uniform convergeert op  $[1, \infty)$ .  
(d). (Lastiger) Is de rij  $(f_n)$  uniform convergent op  $(1, \infty)$ ?
2. Gegeven is de machtreeks  $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)z^k$ .

- (a). Bepaal de convergentiestraal van deze machtreeks.  
(b). Ga na in welke punten van de convergentiecirkel deze machtreeks convergeert.  
(c). Bepaal de som van de machtreeks als elementaire functie.

3. Beschouw de differentiaalvergelijking

$$y' = y(1 - y/20).$$

- (a). Los het bijbehorende beginwaardeprobleem op voor ieder van de startwaarden  $y(0) = -5, 10$  en  $25$ .  
(b). Schets in één figuur de onder (a) gevonden oplossingen en geef hierbij duidelijk hun maximale domein van definitie aan.  
(c). Bepaal de evenwichtspunten van de vergelijking en het type van ieder evenwicht.

Z.O.Z.

4. Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y'' + (1 + i)y' + iy = 0.$$

5. Laat  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  gedefinieerd zijn door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{voor } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

- (a). Bereken de Fouriersinusreeks van  $f$ .
- (b). Bereken de Fouriercosinusreeks van  $f$ .
- (c). Bepaal voor ieder van de reeksen in (a) en (b) de punten  $x$  in  $[0, 2]$  waar de betreffende reeks convergent is en geef voor dergelijke  $x$  de waarde van de betreffende limiet. Motiveer uw antwoorden.

6. Beschouw het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -6x - y - 3x^2 \end{aligned}$$

- (a). Bepaal de evenwichtspunten van het stelsel.
- (b). Bepaal voor ieder evenwichtspunt de stabiliteitseigenschappen van het stelsel in het betreffende punt.

---

We streven ernaar om het werk in de loop van de week van 9 januari 2006 nagekeken te hebben. Zodra de resultaten bekend zijn volgt bericht per email aan de groep studenten die zich in Blackboard "enrolled" hebben.