

## ANALYSE 3

donderdag 2 februari 2006, 10:00-13:00

Het gebruik van een VWO-formulekaart en grafische calculator ter ondersteuning is toegestaan. Let wel: eindantwoorden alleen tellen niet, een volledige uitwerking is noodzakelijk.

Succes!

1. Definieer voor  $n = 1, 2, \dots$  de rij  $(f_n)$  van functies op  $[0, 1]$  door

$$f_n(x) = n^2 x e^{-n^2 x^2}.$$

- (a). Bepaal op  $[0, 1]$  de puntsgewijze limietfunctie  $f$  van de rij  $(f_n)$ .
- (b). Ga na of de rij  $(f_n)$  op  $[0, 1]$  uniform naar  $f$  convergeert.
- (c). Bereken  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ .
- (d). Impliceert uw resultaat bij (b) uw resultaat bij (c) en/of impliceert uw resultaat bij (c) uw resultaat bij (b)? Motiveer uw antwoord.

2. Gegeven is de machtreeks

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} z^{3n-1}.$$

- (a). Bepaal de convergentiestraal van deze machtreeks.
- (b). Bepaal in welke punten van de convergentiecirkel deze machtreeks convergeert.

3. Bepaal expliciet de algemene oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Z.O.Z.

4. Beschouw voor willekeurige  $y_0 \in \mathbb{R}$  het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} ty' + 2y &= t^2 \quad (t > 0) \\ y(1) &= y_0 \end{cases}$$

Ongeacht de waarde van  $y_0$  geldt dat de oplossing  $y(t)$  voor grote  $t$  altijd in goede benadering gegeven wordt door  $\frac{1}{4}t^2$ , omdat voor iedere  $\varepsilon > 0$  geldt dat

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| y(t) - \frac{1}{4}t^2 \right| \cdot t^{-2-\varepsilon} = 0.$$

Bewijs dit.

5. Laat  $L > 0$  en zij  $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -L \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

- (a). Beargumenteer waarom de Fourierreeks van  $f$  puntsgewijs convergeert op  $[-L, L]$ .  
(b). Bereken de Fourierreeks van  $f$  en laat zien dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

- (c). Beperk de functie  $f$  tot het interval  $[0, L]$  en bereken de Fourier-sinusreeks van deze beperkte functie.  
(d). Converteert de Fouriersinusreeks van de tot  $[0, L]$  beperkte functie  $f$  overal op het interval  $[0, L]$  naar  $f$ ?

6. Beschouw het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} x' &= (4 - 2x + y)x \\ y' &= (4 + x - 2y)y \end{aligned}$$

- (a). Bepaal de evenwichtspunten van het stelsel.  
(b). Bepaal voor ieder evenwichtspunt de stabiliteitseigenschappen van het stelsel in het betreffende punt.

EINDE