Tentamen Analyse 3

Donderdag 18 januari 2007, 10-13 uur,

Snellius zalen 174, 312, 412, 401, 402.

- Vermeld uw naam, met voorletters, uw studienummer en uw studierichting op ieder blad.
- Ieder antwoord dient duidelijk gemotiveerd te zijn.

Dit tentamen bestaat uit 6 opgaven, zie ook de achterkant

Bij iedere opgave staat tussen haakjes het maximaal aantal te behalen punten.
SUCCES!

1. Laat $0 < \varepsilon < \sqrt{2} < M$ twee reële getallen zijn en laat $g_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een continue reële functie zijn met de eigenschap dat

   $$\varepsilon \leq g_0(x) \leq M \quad \text{voor alle } x \in \mathbb{R}.$$

   Wij definiëren recursief een rij functies door te schrijven

   $$g_{k+1}(x) = \frac{g_k(x)}{2} + \frac{1}{g_k(x)} \quad (k \geq 0).$$

   a) (3pnt) Bewijs dat, voor alle $x \in \mathbb{R}$ en alle $k \geq 1$,

   $$\sqrt{2} \leq g_{k+1}(x) \leq g_k(x).$$

   b) (2pnt) Definieer $M_1 = \max\left\{M, \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{\varepsilon}\right\}$, $M_{k+1} = \frac{M_k}{2} + \frac{1}{M_k}$. Laat zien dat $g_k(x) \leq M_k$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ en alle $k \geq 1$.

   c) (3pnt) Bewijs dat

   $$\lim_{k\to\infty} M_k = \sqrt{2}.$$

   d) (2pnt) Bereken

   $$\lim_{k\to\infty} \int_{-1}^{1} g_k(x)dx.$$

   Motiveer uw antwoord.

2. a) (3pnt) Bereken alle waarden van $\left(\frac{i+1}{\sqrt{2}}\right)^{i+1}$.

   b) (2pnt) Vind alle oplossingen van de vergelijking

   $$\sin z = i.$$

3. Bepaal voor de volgende machtreeksen de convergentiestralen:

$$\text{a) (2pnt)} \sum_{n=0}^{\infty} n \log(1+n^2) z^n; \qquad \text{b) (3pnt)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \tan\left(\frac{9\pi n}{11}\right) z^n.$$

4. Wij beschouwen de lineaire tweede orde differentiaalvergelijking

$$t^2 y'' - t y' - 3y = 0.$$

(Accenten betekenen: differentiëren naar t).

a) (3pnt) Probeer een oplossing te vinden van de vorm $y = t^k$.

b) (3pnt) Bepaal alle onafhankelijke oplossingen. Motiveer uw antwoord!

c) (2pnt) Laat zien dat het beginwaardeprobleem, bepaald door $y(0) = y'(0) = 0$, oneindig veel oplossingen heeft.

d) (2pnt) Los op:

$$t^2 y'' - t y' - 3y = 5t^4; \quad y(1) = 1; \quad y'(1) = 4.$$

5. Beschouw de differentiaalvergelijking

$$y'' + y' + y = 0.$$

a) (2pnt) Laat zien dat dit probleem complexe eigenwaarden heeft.

b) (3pnt) Is het singuliere (dwz evenwichts-) punt een attractor? Motiveer uw antwoord aan de hand van de ligging van de eigenwaarden.

c) (2pnt) Schrijf de vergelijking als stelsel:

$$y' = z; \quad z' = -y - z.$$

In het fasevlak gebruiken wij poolcoordinaten $y = r(t)\cos\phi(t)$, $z = r(t)\sin\phi(t)$. Vind differentiaalvergelijkingen voor r en voor ϕ.

d) (3pnt) Behandel punt b) in het kader van wat u in c) gevonden hebt.

6. Laat $f(x) = 1 + x^2$.

a) (3pnt) Bereken de Fourierreeks van f op het interval $[-\pi, \pi]$.

b) (4pnt) Op het gebied $(0, \pi)$ kunnen wij f als sinusreeks schrijven. Bereken de Fouriercoëfficiënten. Convergeert de reeks uniform? Puntsgewijs? In de zin van L^2?

c) (3pnt) Veronderstel dat

$$FSS[f] = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx.$$

Bereken $FSS[f](\pi)$.

Tentamencijfer: $\dfrac{\text{behaalde punten}}{5}$