TENTAMEN ANALYSE 3NA

maandag 14 januari 2008, 10.00-13.00

Motiveer elk antwoord dat je geeft d.m.v. een berekening of redenering.

1a. Toon aan dat de Fourierreeks van de functie x^2 op $[-\pi, \pi]$ gelijk is aan $\frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$. (9 pt)

b. Bereken de som van de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. (5 pt)

c. Gebruik de identiteit van Parseval om uitgaande van de gegeven Fourierreeks de som van de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ te berekenen. (7 pt)

2a. Los het volgende beginwaardeprobleem op hetzij m.b.v. de methode van aanverwante functies hetzij m.b.v. variatie van constanten:

$$y''(x) + \frac{1}{4}y(x) = xe^{-x}, \qquad y(0) = y'(0) = 0. \qquad \text{(10 pt)}$$

b. De oplossing van het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} y''(x) + \frac{1}{4}y(x) = \delta(x - t) & \text{voor } x, t > 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

wordt gegeven door de Greense functie $G(x, t)$.

Toon aan dat $G(x, t)$ wordt gegeven door

$$G(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{als } 0 \leq x < t \\ C(t) \sin \frac{1}{2}(x - t) & \text{als } x > t \end{cases}$$

en bepaal $C(t)$. (8 pt)

c. Laat $f(x)$ continu zijn voor $x \geq 0$. Geef een expliciete uitdrukking voor de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y''(x) + \frac{1}{4}y(x) = f(x), \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

in de vorm van een integraal. (5 pt)

Z.O.Z.

3. Beschouw de differentiaalvergelijking

$$y''(x) - xy'(x) + \lambda y(x) = 0, \qquad (x \in \mathbf{C}, \lambda \in \mathbf{C}). \qquad (\P)$$

a. Breng de differentiaalvergelijking in zelfgeadjungeerde ("Sturm-Liouville") vorm. (5 pt)

b. Onderzoek, voor welke waarden van λ er een polynoomoplossing is; laat tevens zien dat er voor elk geheel getal $N \geq 0$ precies één waarde van λ is waarvoor er een polynoomoplossing van graad N is. (6 pt)

We normeren de polynoomoplossingen zo, dat de de coëfficiënt van de hoogste macht gelijk is aan 1. Deze polynomen noemen we $Q_N(x)$. De polynomen $Q_N(x)$ vormen een volledig stel eigenfuncties van een singulier Sturm-Liouvilleprobleem bestaande uit de eigenwaardenvergelijking (¶) waarbij als randvoorwaarde geldt dat de oplossing niet sneller groeit dan een polynoom.

c. Hoe luidt expliciet de orthogonaliteitsrelatie voor de eigenfuncties $Q_N(x)$? (4 pt)

4a. Bepaal de singulariteiten van de functie $f(z) = \dfrac{z+2}{z(z-1)^3}$ in het complexe vlak en geef van elk van de singulariteiten het type aan. (3 pt)

b. Bereken het hoofddeel van de Laurentreeks van $f(z)$ rond $z = 1$. (6 pt)

5. Bereken m.b.v. contourintegratie de waarde van de integraal $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+4} dx.$ (13 pt)

Antwoorden.

1a. De Fourierreeks is $\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$; $b_n=0$ omdat x^2 even is op $[-\pi,\pi]$. Verder is

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2;\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nxdx=\frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

b. Vul $x=\pi$ (of $-\pi$) in en ga na dat de Fourierreeks convergeert naar π^2 omdat de periodieke voortzetting continu is in $x=\pm\pi$. Het antwoord is $\pi^2/6$.

c. De identiteit van Parseval luidt:

$$\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2+|b_n|^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx.$$

Invullen en de integraal berekenen geeft $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}=\dfrac{\pi^4}{90}$.

2a. De oplossing van de homogene vergelijking is $A\cos(x/2)+B\sin(x/2)$ voor constanten A,B. Door een oplossing te proberen van de vorm $(ax+b)e^{-x}$ vinden we dat een particuliere oplossing wordt gegeven door $\left(\dfrac{4}{5}x+\dfrac{32}{25}\right)e^{-x}$. De algemene oplossing is dus

$$y(x)=A\cos(x/2)+B\sin(x/2)+\left(\frac{4}{5}x+\frac{32}{25}\right)e^{-x}.$$

Invullen van de randvoorwaarden $y(0)=y'(0)=0$ geeft de oplossing

$$y(x)=\frac{1}{25}(-32\cos\frac{1}{2}x+24\sin\frac{1}{2}x+(20x+32)e^{-x}).$$

b. Ga na dat $G(x,t)$ een oplossing is van de homogene d.v. $G_{xx}(x,t)+\frac{1}{4}G(x,t)=0$ voor $0<x<t$ en voor $x>t$. Verder voldoet G aan de randvoorwaarden $G(0,t)=G_x(0,t)=0$, en ook is $G(x,t)$ continu voor $x=t$ en tenslotte volgt uit $G_x(t+,t)-G_x(t-,t)=1$ dat $C(t)=2$.

c. $y(x)=\displaystyle\int_0^{\infty}f(t)G(x,t)dt=2\int_0^{x}f(t)\sin\frac{1}{2}(x-t)dt.$

3a. Vermenigvuldigen met $\mu(x)$ zodanig dat $\mu y''-x\mu y'=(\mu y')'$ brengt de d.v. in zelfgeadjungeerde vorm. $\mu'(x)=-x\mu(x)$ heeft als oplossing $\mu(x)=\exp(-\frac{1}{2}x^2)$; een zelfgeadjungeerde vorm is dus

$$(e^{-x^2/2}y'(x))'+\lambda e^{-x^2/2}y(x)=0.$$

b. Invullen van de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ levert de recurrente betrekking $(n-\lambda)a_n = a_{n+2}(n+2)(n+1)$; voor $\lambda = N$ is er dus een polynoom van graad precies N.

c. Uit de zelfgeadjungeerde vorm bij (a) zien we dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q_n(x) Q_m(x) e^{-x^2/2} dx = 0$$

als $n \neq m$.

4a. $f(z)$ heeft een pool van orde 1 in $z=0$ en een pool van orde 3 in $z=1$.

b. Laat $w = z-1$, dan is

$$f(w+1) = \frac{w+3}{w^3(w+1)} = \frac{1}{w^3}(w+3)(1-w+w^2-\ldots) = \frac{1}{w^3}(3-2w+2w^2+\ldots)$$

dus het hoofddeel is $\dfrac{3}{(z-1)^3} - \dfrac{2}{(z-1)^2} + \dfrac{2}{z-1}$.

5. Merk op dat de integraal convergeert omdat de integrand continu is en als $|x|$ groot is, dan gedraagt de integrand zich als $1/x^2$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+4} dx = \text{ Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2+4} dx.$$

Integreer nu de functie $g(z) = \dfrac{e^{2iz}}{z^2+4}$ over de contour bestaande uit het segment $[-R, R]$ en de halve cirkelboog door $R, iR, -R$ in het bovenhalfvlak. De integraal over de halve cirkelboog gaat naar 0 vanwege het lemma van Jordan (expliciet noemen!) dus als $R \to \infty$ gaat de integraal over het segment $[-R, R]$ naar de integraal over de contour. Binnen de contour ligt alleen de singulariteit $z = 2i$, een pool van orde 1. Dus is

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2iz}}{z^2+4} dz = 2\pi i \text{ Res}_{z=2i} \frac{e^{2iz}}{z^2+4} = 2\pi i \lim_{z \to 2i} (z-2i) \cdot \frac{e^{2iz}}{z^2+4} = \frac{\pi e^{-4}}{2}.$$

Dus is ook

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+4} dx = \text{ Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2+4} dx = \frac{\pi e^{-4}}{2}.$$

TENTAMEN ANALYSE 3NA

donderdag 27 maart 2008, 10.00-13.00

Motiveer elk antwoord dat je geeft d.m.v. een berekening of redenering.

---

1. Bepaal de singuliere punten in het complexe vlak van de functie $f(z) = \dfrac{z}{\sin^2 z}$ en geef van elk van de singulariteiten het type aan. (6 pt)

2. Bereken m.b.v. contourintegratie de waarde van de integraal $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx.$ (12 pt)

3a. Los het volgende beginwaardeprobleem op hetzij m.b.v. de methode van aanverwante functies hetzij m.b.v. variatie van constanten:

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = x, \qquad y(0) = y(1) = 0. \qquad (11 \text{ pt})$$

b. De oplossing van het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \delta(x-t) & \text{voor } 0 < x, t < 1 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

wordt gegeven door de Greense functie $G(x,t)$.

Toon aan dat $G(x,t)$ wordt gegeven door

$$G(x,t) = \begin{cases} C_1 e^{t-x} x(t-1) & \text{als } 0 \le x < t < 1 \\ C_2 e^{t-x} t(x-1) & \text{als } 0 < t < x \le 1 \end{cases}$$

en bepaal de constanten C_1, C_2. (7 pt)

c. Laat $f(x)$ continu zijn voor $0 \le x \le 1$. Geef een expliciete uitdrukking voor de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = f(x), \qquad y(0) = y(1) = 0$$

in de vorm van een integraal. (4 pt)

De overige opgaven staan op de andere zijde van dit vel.

4. Beschouw de differentiaalvergelijking

$$zu''(z) + 2u'(z) + 4zu(z) = 0, \qquad (z \in \mathbf{C}). \tag{¶}$$

a. $z = 0$ is een regulier singulier punt van de differentiaalvergelijking. Leg uit waarom. (3 pt)

b. Bepaal de indiciaalvergelijking van (¶) in $z = 0$. (4 pt)

c. Bepaal twee lineair onafhankelijke oplossingen $u_1(z), u_2(z)$ van (¶) in de vorm van een (gegeneraliseerde) machtreeks. Voor welke $z \in \mathbf{C}$ convergeren de reeksen? (6 pt)

d. Geef een gesloten uitdrukking (in termen van elementaire functies) voor de oplossingen $u_1(z)$ en $u_2(z)$. (4 pt)

5a. Laat zien, m.b.v. de omkeerformule voor de Fouriertransformatie, dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos y}{y^2} \cos xy \; dy = \begin{cases} \pi(1-|x|) & |x| < 1. \\ 0 & |x| > 1. \end{cases} \qquad (8 \text{ pt})$$

b. Bereken de integraal $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1-\cos y}{y^2}\right)^2 dy$ m.b.v. de identiteit van Parseval (en onderdeel (a)). (5 pt)

Antwoorden.

1. $\sin^2 z$ heeft nulpunten van orde 2 in $k \cdot \pi$ voor $k \in \mathbf{Z}$. $f(z)$ heeft dus een pool van orde 2 in $z = k \cdot \pi$ voor $k \in \mathbf{Z}, k \neq 0$. $f(z)$ heeft een pool van orde 1 in $z = 0$ want $\lim_{z \to 0} \dfrac{z^2}{\sin^2 z} = 1$.

2. Integreer de functie $g(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^2}$ over de contour bestaande uit het segment $[-R, R]$ en de halve cirkelboog door $R, iR, -R$ in het bovenhalfvlak. De integraal over de halve cirkelboog gaat naar 0 omdat de integrand naar 0 gaat als $1/R^4$ ($1/R^2$ zou al genoeg zijn). Dus als $R \to \infty$ gaat de integraal over het segment $[-R, R]$ naar de integraal over de contour. Binnen de contour ligt alleen de singulariteit $z = i$, een pool van orde 2. Het residu van $g(z)$ in $z = i$ is dan

$$\lim_{z \to i} \frac{d}{dz} \frac{(z-i)^2}{(z^2+1)^2} = \lim_{z \to i} \frac{d}{dz} \frac{1}{(z+i)^2} = \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{1}{4i}.$$

Dus is

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dz = 2\pi i \ \mathrm{Res}_{z=i} \frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

3a. De oplossing van de homogene vergelijking is $y_h(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x}$ voor constanten A, B. Door een oplossing te proberen van de vorm $ax + b$ vinden we dat een particuliere oplossing wordt gegeven door $y_p(x) = x - 2$. De algemene oplossing is dus

$$y(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x} + x - 2.$$

Invullen van de randvoorwaarden $y(0) = y(1) = 0$ geeft $A = 2, B = e - 2$ dus de oplossing is

$$y(x) = 2e^{-x} + (e-2)xe^{-x} + x - 2.$$

b. Ga na dat $G(x,t)$ een oplossing is van de homogene d.v. $G_{xx}(x,t) + 2G_x(x,t) + G(x,t) = 0$ voor $0 < x < t$ en voor $t < x < 1$. Tevens voldoet G aan de randvoorwaarden $G(0,t) = G(1,t) = 0$ en uit $G(x,t)$ continu voor $x = t$ volgt dat $C_1 = C_2$. Tenslotte volgt uit $G_x(t+,t) - G_x(t-,t) = 1$ dat $C_1 = C_2 = 1$.

c. $y(x) = \displaystyle\int_0^1 f(t)G(x,t)dt = \int_0^x f(t)e^{t-x}t(x-1)dt + \int_x^1 f(t)e^{t-x}x(t-1)dt.$

4a. Als we de d.v. schrijven in de vorm

$$u''(z) + p(z)u'(z) + q(z)u(z) = 0$$

dan heeft $p(z) = \dfrac{2}{z}$ in $z = 0$ een pool van orde 1 (mag hoogstens 1 zijn) en $q(z) = 1$ is in $z = 0$ analytisch (de pool mag van orde maximaal 2 zijn).

b. Invullen van de gegeneraliseerde machtreeks (ofwel de Frobeniusreeks) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\sigma}$ in de d.v. (¶) levert de recurrente betrekking

$$a_n(n+\sigma)(n+\sigma+1) + 4a_{n-2} = 0.$$

$n = 0$ nemen geeft de indiciaalvergelijking $\sigma(\sigma+1) = 0$.

c. In het geval dat $\sigma = 0$ vinden we $\dfrac{a_n}{a_{n-2}} = \dfrac{-4}{n(n+1)}$. Door $a_0 = 1, a_1 = 0$ te kiezen krijgen we de oplossing $u_1(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n z^{2n}}{(2n+1)!}$; in het geval dat $\sigma = -1$ vinden we $\dfrac{a_n}{a_{n-2}} = \dfrac{-4}{n(n-1)}$.

Door $a_0 = 1, a_1 = 0$ te kiezen krijgen we de oplossing $u_2(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n z^{2n-1}}{(2n)!}$.

d. $u_1(z) = \dfrac{\sin 2z}{2z}$ en $u_2(z) = \dfrac{\cos 2z}{z}$.

5a. De Fouriergetransformeerde van de (even) functie $f(x) = \begin{cases} \pi(1-|x|) & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$ is

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{-1}^{1} (1-|x|)(\cos xy - i\sin xy)dx =$$

$$= \sqrt{2\pi} \int_{0}^{1} (1-x)\cos xy dx = \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1-\cos y}{y^2}.$$

De omkeerformule levert nu (merk op dat $\hat{f}(y)$ eveneens even is)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)e^{ixy}dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos y}{y^2}(\cos xy + i\sin xy)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos y}{y^2} \cos xy\, dy.$$

b. De identiteit van Parseval luidt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(y)|^2 dy.$$

M.b.v. (a) vinden we nu

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1-\cos y}{y^2}\right)^2 dy = \pi^2 \int_{-1}^{1} (1-|x|)^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2$$

en dus is

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1-\cos y}{y^2}\right)^2 dy = \frac{\pi}{3}.$$