Tentamen Analyse 3NA.

Maandag 12 januari 2009, 10.00-13.00.

Motiveer elk antwoord dat je geeft d.m.v. een berekening of redenering.

---

1. Bereken de eerste zes coëfficiënten $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ van de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ van $\cos(z^2 + z)$ rond $z = 0$. (8 pt)

2. a) Bepaal de polen van de functie $g(z) = \dfrac{z^2}{z^4 + 16}$. (5 pt)

b) Toon aan m.b.v. contourintegratie dat

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 16} dx = \frac{1}{8}\pi\sqrt{2}. \qquad (12 \text{ pt})$$

3. Beschouw het beginwaardenprobleem

$$\begin{cases} y' + 2y \tan x = f(x) & (0 < x < \pi/2) \\ y(0) = 0 & \end{cases}$$

waarbij $y' = \frac{dy}{dx}$ en $f(x)$ een continue functie is op $[0, \pi/2]$.

a) Bepaal een integrerende factor voor de differentiaalvergelijking. (6 pt)

b) Geef een integraaluitdrukking voor de oplossing van het beginwaardenprobleem. (4 pt)

c) Geef een expliciete uitdrukking voor de oplossing $y(x) = g(x, t)$ van het beginwaardenprobleem voor het geval dat $f(x) = \delta(x - t)$, waarbij t een reëel getal tussen 0 en $\pi/2$ is. (5 pt)

De laatste twee opgaven staan op de volgende pagina.

4. a) Laat zien dat de Fouriersinusreeks van de functie $\pi x - x^2$ op $[0, \pi]$ gegeven wordt door

$$\frac{8}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1)x}{(2m+1)^3}. \qquad (8 \text{ pt})$$

b) Bepaal de som van de reeks $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3}$. (6 pt)

c) De reeks is gedefinieerd voor alle reële waarden van x. Wat is de waarde van de reeks voor $x = 3\pi/2$? (3 pt)

d) Door de reeks termsgewijs te differentiëren ontstaat een Fouriercosinusreeks. Toon aan dat deze reeks absoluut convergeert voor alle $x \in \mathbb{R}$. (4 pt)

e) De reeks van onderdeel (d) is de Fouriercosinusreeks op $[0, \pi]$ van de functie $\pi - 2x$. Waarom kun je dit meteen concluderen zonder eerst de Fouriercosinusreeks van $\pi - 2x$ te bepalen? (5 pt)

5. Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$z^2 y''(z) + z y'(z) - 9y(z) = 0.$$

a) Leg uit dat $z = 0$ een regulier singulier punt is van de differentiaalvergelijking. (2 pt)

b) Bepaal de indiciaalvergelijking voor $z = 0$. (5 pt)

c) Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking. (5 pt)

Beschouw het volgende eigenwaardeprobleem op $[1, e]$:

$$\begin{cases} z^2 y''(z) + z y'(z) + \lambda y(z) = 0. \\ y'(1) = y'(e) = 0. \end{cases}$$

d) De eigenfuncties vormen een orthogonaal stelsel t.a.v. een zeker inproduct. Geef de vorm van de orthogonaliteitsrelatie tussen de eigenfuncties weer. Het is niet nodig om de eigenwaarden en eigenfuncties expliciet te bepalen. (6 pt)