

Tentamen Analyse 3NA, 11-01-2010

Antwoorden.

1a. Als we de d.v. schrijven met coëfficiënt 1 voor y' , dus $y'(z) + \frac{z+1}{z}y(z) = 0$, dan heeft de coëfficiënt van $y(z)$ in $z = 0$ een pool van orde 1.

b. Invullen van $y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\sigma}$ (met $a_0 \neq 0$) geeft voor de coëfficiënt van $z^{n+\sigma}$:

$$(n + \sigma + 1)a_n + a_{n-1} = 0.$$

Voor $n = 0$ geeft dit $\sigma + 1 = 0$, voor $n > 0$ is dan

$$a_n = -a_{n-1}/n = \dots = (-1)^n a_0/n!.$$

Een oplossing wordt dus gegeven door

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n-1}}{n!}.$$

(Op een constante na is het de enige oplossing.)

c. Uit de machtreeks van $y(z)$ zien we dat $y(z) = e^{-z}/z$.

Het is ook mogelijk om de eerste-orde d.v. rechtstreeks (door te integreren) op te lossen: primitiveren van $y'(z)/y(z) = -\frac{z+1}{z}$ geeft $\log y(z) = -1 - \log z + C$ waarbij C een constante is. Maar dan is

$$y(z) = D \frac{e^{-z}}{z}$$

voor een constante D .

3. Neem aan dat de Fouriergetransformeerde (FT) van y, y', y'' bestaan en laat $Y(s)$ de FT van $y(x)$ zijn. Dan is de FT van y' en y'' gelijk aan $isY(s)$ resp. $-s^2Y(s)$. Invullen in de d.v. geeft dan

$$(-s^2 + 2is + 1)Y(s) = F(s)$$

en de omkeerformule toepassen levert dan $y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(s)e^{isx}}{-s^2 + 2is + 1} ds$.

- b. Omdat niet zeker is of de FT van de oplossing y, y' en y'' bestaan en of y voldoet aan de voorwaarden voor de omkeerformule, moet nog worden nagegaan of de gevonden functie inderdaad een oplossing is. Omdat F absoluut integreerbaar is, kunnen we binnen het integraalteken differentiëren en we vinden

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{isx} = f(x).$$

- c. Omdat de FT van $\delta(x-a)$ gelijk is aan $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-isa}$, wordt zo'n oplossing volgens (a) gegeven door

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{is(x-a)}}{-s^2 + 2is + 1} ds.$$

- 3a. Voor $\lambda = 0$ is de oplossing van de d.v. $y'' + \lambda y = 0$ gelijk aan $y(x) = A + Bx$ voor constanten A, B . Invullen van de randvoorwaarden geeft dat $B = 0$ en dus is $\lambda = 0$ een eigenwaarde met eigenfunctie $y_0(x) = 1$. Voor $\lambda \neq 0$ wordt de algemene oplossing van de d.v. $y'' + \lambda y = 0$ gegeven door $y(x) = A \cos \sqrt{\lambda}x + B \sin \sqrt{\lambda}x$ voor willekeurige constanten A en B . $y'(0) = 0$ geeft dan $B = 0$ en $y'(\pi) = 0$ geeft dan $A \sin \sqrt{\lambda}\pi = 0$. Hieruit volgt dat $\sqrt{\lambda} = n$ voor n een geheel getal, $n \neq 0$ (de enige nulpunten van $\sin z$ in $\mathbb{C}$ zijn $z = n\pi$ voor gehele n) dus de eigenwaarden zijn $\lambda_n = n^2$ met $n = 0, 1, 2, \dots$ met eigenfuncties $y_0(x) = 1$ en $y_n(x) = \cos nx$ voor $n > 0$.

- b. De gegeneraliseerde Fourierreeks van een functie $f \in H$ is van de vorm
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$$
 waarbij

$$a_n = \frac{\int_0^{\pi} \overline{y_n(x)} f(x) dx}{\int_0^{\pi} |y_n(x)|^2 dx}$$

dus

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n > 0).$$

Maar dit zijn precies de Fouriercoëfficiënten van de Fouriercosinusreeks op $[0, \pi]$.

- c. Berekening van de Fouriercoëfficiënten in (b) geeft $a_0 = \pi/2$ en $a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\cos n\pi - 1}{n^2}$ voor $n > 0$ dus de Fouriercosinusreeks is

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ oneven}} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

- d. De reeks convergeert absoluut (volgens het vergelijkingscriterium) omdat de termen $a_n \cos nx$ in absolute waarde kleiner of gelijk zijn aan $\frac{4}{\pi n^2}$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergeert.

- 4a. De singulariteiten zijn de nulpunten van de noemer, dus de oplossingen van $z^4 + 4 = 0$. De oplossingen zijn

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}, \quad z_2 = \sqrt{2}e^{3i\pi/4}, \quad z_3 = \sqrt{2}e^{5i\pi/4}, \quad z_4 = \sqrt{2}e^{7i\pi/4},$$

ofwel

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = -1 + i, \quad z_3 = -1 - i, \quad z_4 = 1 - i.$$

De nulpunten zijn alle verschillend en dus enkelvoudig: het zijn polen van orde 1 van $f(z)$.

- b. We ontwikkelen de teller en de noemer in machtreeksen tot termen van orde z^4 en gebruiken voor $1/\text{noemer}$ de meetkundige reeksontwikkeling:

$$\begin{aligned} \frac{e^{iz}}{z^4 + 4} &= \frac{e^{iz}}{4(1 + z^4/4)} = \frac{1}{4} e^{iz} (1 - z^4/4 + \dots) = \\ &= \frac{1}{4} (1 + iz - z^2/2 - iz^3/6 + z^4/24 + \dots)(1 - z^4/4 + \dots) = \\ &= \frac{1}{4} (1 + iz - z^2/2 - iz^3/6 - 5z^4/24 + \dots). \end{aligned}$$

- c. Gebruik als contour C (bijvoorbeeld) de vereniging van de halve cirkelboog C_2 met middelpunt 0 en straal R (R voldoende groot, maar zeker $R > \sqrt{2}$) in het bovenhalfvlak met het segment $C_1 = [-R, R]$. Wegens het lemma van Jordan (de teller is van de vorm e^{iaz} met $a = 1 > 0$) gaat de integraal van $f(z)$ over C_2 naar 0 als $R \rightarrow \infty$. Dus

$$\oint_C f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz.$$

We moeten dus de contourintegraal van $f(z)$ over C berekenen. Binnen C liggen de singuliere punten z_1 en z_2 (zie (a)), dus volgens de residustelling is

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= 2\pi i (\operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname{Res}_{z=z_2} f(z)) = \\ &= 2\pi i \left(\lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) + \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2) f(z) \right) = 2\pi i \left(\frac{e^{i-1}}{-8+8i} + \frac{e^{-1-i}}{8+8i} \right).\end{aligned}$$

Verder uitwerken geeft het gevraagde antwoord.