Antwoorden.

1a. De singulariteiten zijn de nulpunten van $z^2 - 3iz - 2$, dus $z = i$ en $z = 2i$, beide polen van orde 1.

b. De convergentiestraal is 1, de afstand van $z = 0$ tot het dichtstbijzijnde singuliere punt. (De formule van Cauchy of d'Alembert gebruiken werkt hier niet omdat we geen uitdrukking voor de algemene coëfficiënt a_n hebben.)

c. Ontwikkel de teller in een machtreeks en laat alleen termen van orde niet hoger dan 2 staan:

$$\frac{e^{2iz}}{z^2 - 3iz - 2} = \frac{1 + 2iz - 2z^2 + \ldots}{-2(1 + 3iz/2 - z^2/2)} =$$

$$= -\frac{1}{2}(1 + 2iz - 2z^2)(1 - \frac{3iz}{2} + \frac{1}{2}z^2 + \left(\frac{3iz}{2}\right)^2) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}iz + \frac{3}{8}z^2 + \ldots$$

dus $a_0 = -\frac{1}{2}$, $a_1 = -\frac{i}{4}$, $a_2 = \frac{3}{8}$. Alternatief: $f(0) = a_0$, $f'(0) = a_1$ en $f''(0)/2 = a_2$ maar de tweede afgeleide nemen is veel werk en kan makkelijk tot fouten leiden. Als a_n voor $n > 2$ gevraagd worden wordt het op deze manier helemaal ondoenlijk!

d. Kies als contour het segment $[-R, R]$ aangevuld met een halve boog $|z| = R$ in het bovenhalfvlak. Volgens het lemma van Jordan (mag worden toegepast omdat $\frac{1}{z^2-3iz-2}$ naar nul gaat als $|z| \to \infty$ en de factor in de teller van de vorm e^{iaz} is met $a > 0$) gaat de integraal van $f(z)$ over de halve boog naar 0 als R naar oneindig gaat. De integraal is dus gelijk aan $2i\pi$ maal de som van de residuen van $f(z)$ in $z = i$ en $z = 2i$. Dit is gelijk aan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, dz = 2\pi i(\lim_{z \to i} \frac{e^{2iz}}{z - 2i} + \lim_{z \to 2i} \frac{e^{2iz}}{z - i}) = 2\pi(e^{-4} - e^{-2}).$$

2a. Met scheiden van variabelen: $y(x) = Ce^{-ax^2}$ en $y(0) = 1$ geeft $C = 1$.

b. Als $\mathcal{F}(y_1) = Y_1$, dan is $\mathcal{F}(y_1') = ikY_1$ en $\mathcal{F}(xy_1) = iY_1'$. Dus

$$0 = \mathcal{F}(y_1')(k) + \mathcal{F}(2axy_1)(k) = ikY_1(k) + 2aiY_1'(k)$$

vanwege de lineariteit van de operator $\mathcal{F}$.

c. Net als in (a) is $Y_1(k) = Ce^{-k^2/4a}$ en

$$C = Y_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y_1(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

d. Een integrerende factor is e^{x^2}: de d.v. wordt $(e^{x^2}y)' = xe^{x^2}$. Primitiveren geeft

$$y(x) = e^{-x^2}(\frac{1}{2}e^{x^2} + C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-x^2}$$

waarbij $C = 1/2$ volgt uit de beginvoorwaarde. Alternatief: een particuliere oplossing is $y_p(x) = \frac{1}{2}$. De algemene oplossing is nu $y(x) = Ce^{-x^2} + \frac{1}{2}$ (de complementaire oplossing vinden we uit (a) met $a = 1$). $y(0) = 1$ geeft $C = \frac{1}{2}$.

3a. $y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\sigma}$ invullen geeft de recurrente relatie

$$a_{n+1}(n+\sigma+1)(n+\sigma+2) = a_n(n+\sigma-\lambda).$$

Voor $n = -1$ vinden we, omdat $a_n = 0$ voor $n < 0$ en $a_0 \neq 0$, de indiciaalvergelijking $\sigma(\sigma+1) = 0$.

b. De index is $\sigma = 0$ of $\sigma = -1$. Voor een polynoomoplossing moet $\sigma = 0$ zijn. De recurrente betrekking is dan

$$a_{n+1}(n+1)(n+2) = a_n(n-\lambda).$$

Voor $\lambda = N = 0, 1, 2, 3, \ldots$ krijgen we zo een polynoomoplossing van graad N.

c. Voor $\lambda = -2$ en $\sigma = 0$ vinden we $a_{n+1}(n+1)(n+2) = a_n(n+2)$, dus $a_n = \frac{a_0}{n!}$. De bijbehorende oplossing is dus $y(z) = a_0 e^z$. Voor $\lambda = -2$ en $\sigma = -1$ vinden we $a_{n+1}n(n+1) = a_n(n+1)$. Dit geeft $a_0 = 0$, een tegenspraak met de aanname dat $a_0 \neq 0$. Er is dus geen Frobeniusreeksoplossing voor $\sigma = -1$.

4a. De sinusreeks heeft de vorm $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n s_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{2}$ waarbij

$$b_n = \frac{\langle s_n, f\rangle}{\langle s_n, s_n\rangle} = \frac{\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx}{\int_0^2 \sin^2\frac{n\pi x}{2}\,dx} = \int_0^2 (2x - x^2)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx.$$

De integraal is gelijk aan 0 als n even is en $\frac{32}{\pi^3 n^3}$ als n oneven is.

Een andere manier om aan de sinusreeks te komen is door de functie oneven voort te zetten tot $[-2, 2]$ en de Fouriersinus-cosinusreeks te bepalen. De coëfficiënten a_n van de cosinussen worden nul dus we krijgen een reeks van de vorm $\sum_{n=1}^{\infty} b_n s_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{2}$ (periode is 4 dus neem alle sinussen met periode (een deler van) 4) en

$$b_n = \frac{2}{4} \int_{-2}^{2} f(x) \sin \frac{n\pi x}{2}\, dx = \int_{0}^{2} (2x - x^2) \sin \frac{n\pi x}{2}\, dx.$$

b. De symmetrie is $f(x) = f(2-x)$ (de grafiek van f is symmetrisch in de lijn $x = 1$). Verder geldt dat $\sin \frac{n\pi(2-x)}{2} = \sin \frac{n\pi x}{2}$ dan en slechts dan als n oneven is.

c. $x = 1$ invullen geeft de gelijkheid; gelijkheid geldt omdat $f(x)$ (stuksgewijs) continu is en van begrensde variatie: er zijn eindig veel maxima en minima op $[0, 2]$ (convergentiecriterium van Dirichlet).

d. De functies $s_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{2}$ vormen een volledig orthonormaal stelsel op $[0, 2]$ (vergelijk 4a) en dus geldt

$$\frac{16}{15} = \int_{0}^{2} (2x - x^2)^2\, dx = \langle f, f \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle s_n, f \rangle|^2 = \frac{32^2}{\pi^6} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^6}.$$