

TENTAMEN ANALYSE 4. 19 mei 2003. 10.10-13.10.

1. Bereken m.b.v. contourintegratie:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 9)^2} dx.$$

Schrijf duidelijk alle tussenstappen op.

2. Bewijs dat alle nulpunten van het polynoom $z^5 + z^2 + 3$ in de ring $\{z \in \mathbf{C} : 1 < |z| < 2\}$ liggen.

3. Gegeven is de functie $f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z - 15}$.

- a. Bepaal de Laurentreeks van $f(z)$ met centrum $z = 0$ voor het ringvormig gebied $\{z \in \mathbf{C} : 3 < |z| < 5\}$.
- b. $f(z)$ is rond $z = 3$ in een Laurentreeks te ontwikkelen die convergeert voor $|z-3| > r$ voor zekere r . Bepaal de minimale waarde van r en bepaal de Laurentreeks.

4. Los m.b.v. Laplacetransformatie het volgende beginwaardenprobleem op:

$$\begin{cases} y'' + 4y = \sin 2x \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = -1/2. \end{cases}$$

(Je kunt zo nodig gebruiken dat $-2 \sin a \sin b = \cos(a + b) - \cos(a - b)$).

- 5a. Toon aan dat de Fouriersinusgetransformeerde van e^{-2x} gelijk is aan $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{y}{y^2 + 4}$.

- b. Los het volgende randwaardenprobleem op:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & (x > 0, 0 < y < 1) \\ u(x, 0) = 0 & (x > 0) \\ u_y(x, 1) = e^{-2x} & (x > 0) \\ u(0, y) = 0 & (y > 0) \end{cases}$$

waarbij $u(x, y)$ een begrensde functie is voor $x > 0$, $0 < y < 1$. Schrijf de oplossing als een enkelvoudige integraal.