Tentamen Analyse IV, 17 augustus 2004, 10.00–13.00 uur

1. (a) Zij f analytisch op en binnen een positief georiënteerde enkelvoudig gesloten kromme C en zij z binnen C. Geef de integraalrepresentatie van Cauchy voor $f(z)$.

   (b) Zij Γ de positief georiënteerde cirkel met straal 3 om 0 en
   $$g(z) = \int_\Gamma \frac{(3\zeta - 1)\sin \zeta}{(\zeta - z)}\, d\zeta.$$
   Bepaal $g'(1-i)$ en $g'(4-4i)$.

   (c) Zij h analytisch op en binnen de cirkel $\{z \mid |z| = r\}$ en laat
   $$M(r) = \max{}_{|z|=r} |h(z)|.$$
   Bewijs de ongelijkheid van Cauchy: voor ieder geheel getal $k \geq 1$ geldt:
   $$\frac{|h^k(0)|}{k!} \leq M(r)/r^k.$$

2. Laat zien dat het polynoom $z^5 + 4z^4 + z^3 - z^2 - 2z - 1$ precies vier nulpunten heeft in de verzameling $\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{4} < |z| < 2\}$.

3. (a) Bepaal de Laurent-ontwikkeling van
   $$f(z) = \frac{1}{(z+1)z(z-2)}$$
   bij $z = 0$ voor het gebied $\{z \mid 1 < |z| < 2\}$.

   (b) Bepaal de residuen van $f(z) = \frac{z^2-1}{z^2(z^2+1)}$ bij 0, i en $-i$. Bepaal vervolgens
   $$\int_\Gamma f(z) dz,$$
   waar Γ de positief georiënteerde driehoek is met hoekpunten $-1+i$, $1-2i$ en $2+2i$.

4. (a) Laat zien dat de Laplace-getransformeerde van $f(t) = e^t \sin t$ gelijk is aan $\mathcal{L}(f)(s) = 1/((s-1)^2+1)$ en de Laplace-getransformeerde van $g(t) = e^t \cos t$ gelijk is aan $\mathcal{L}(g)(s) = (s-1)/((s-1)^2+1)$. (Gebruik eventueel dat $\cos t + i \sin t = e^{it}$.) Geef ook aan voor welke s deze formules geldig zijn.

   (b) Bereken de functie $y(t)$, waarvoor de Laplace-getransformeerde gelijk is aan
   $$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{10}{s(s+1)((s-1)^2+1)}.$$
   Maak eventueel gebruik van de ontbinding
   $$\frac{10}{s(s+1)((s-1)^2+1)} = \frac{5}{s} + \frac{-2}{s+1} + \frac{-3s+4}{(s-1)^2+1}.$$

(c) Los het volgende beginwaardeprobleem op door gebruik te maken van Laplace-transformaties.

$$\begin{cases} y'' + y' = 10\ e^t \sin t \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

5. (a) Laat zien dat de Fouriergetransformeerde van de functie $f(x) = e^{-2|x|}$ gelijk is aan

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{4}{4 + \omega^2}.$$

(b) Zij $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq 1\}$. Los, door gebruik te maken van Fouriertransformaties, het volgende beginwaardeprobleem op $\mathcal{S}$ op:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u(x, 1) = 0 \\ u(x, y) \to 0, \text{uniform in } y \text{ als } |x| \to \infty. \end{cases}$$

Schrijf de oplossing als enkelvoudige integraal.

$$\text{Cijfer} = 1 + \frac{(5+5+5)+20+(10+10)+(5+5+10)+(5+10)}{10}.$$