Tentamen Analyse 4,
Maandag 13 juni 2005, 14.00 uur – 17.00 uur

1. Bepaal
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}.$$

2. Zij n een geheel getal, groter of gelijk aan 4. Laat zien dat de nulpunten van het polynoom $p(z) = z^n + nz + n$ in de verzameling
$$\{z \in \mathbb{C} \mid 1/2 < |z| < 2\}$$
liggen.

3. (a) Bepaal de Laurentreeks om 0 op de annulus $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 3\}$ van
$$\frac{10z}{(z-i)(z+3)}$$
   (b) Bepaal het hoofddeel van de Laurentontwikkeling om 0 van
$$\frac{e^{z^2}+1}{e^{z^2}-1}.$$

4. Zij f holomorf op $\mathbb{C}$. Bewijs de volgende uitspraken.
   (a) Zij $M > 0$ een constante. Als $|f(z)| > M$ voor elke $z \in \mathbb{C}$, dan is f constant.
   (b) Als $e^{f(z)}$ begrensd is op $\mathbb{C}$, dan is f constant.
   (c) Als Re $f(z)$ naar boven begrensd is, dan is f constant.

5. Bepaal een oplossing voor de integraalvergelijking

$$f(t) = 2\cos t + \int_0^t (t-\tau) f(\tau) d\tau$$

door gebruik te maken van Laplacetransformaties.

Gebruik eventueel de identiteit

$$\frac{2s^3}{(s^2+1)(s^2-1)} = \frac{1}{2(s-1)} + \frac{1}{2(s+1)} + \frac{s}{s^2+1}.$$

6. (a) Laat zien dat de Fouriergetransformeerde van de functie

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

gelijk is aan

$$\frac{1}{1+i\omega}.$$

(b) Zij $\mathcal{S} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq 1\}$. Los, door gebruik te maken van Fouriertransformaties, het volgende beginwaardeprobleem op $\mathcal{S}$ op, met f als in opgave (a).

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u(x,1) = 0 \\ u(x,y) \to 0, \text{uniform in } y \text{ als } |x| \to \infty. \end{cases}$$

Schrijf de oplossing als enkelvoudige integraal.

Tentamencijfer = $\frac{1}{10}(15 + 15 + (10+5) + (5+5+5) + 15 + (6+9)) + 1.$