Hertentamen Analyse 4

22 augustus 2007, 14.00–17.00

Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een (bij voorkeur korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie. Het gebruik van een rekenmachine is toegestaan. Boeken, telefoon en andere hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

---

1. (a) Laat met behulp van de residuenstelling zien dat

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{\cos w}{w\,(w-z)\,\sin w}\,dw=\frac{\cos z}{z\,\sin z}-\frac{1}{z^2}+\sum_{l=1}^{n}\frac{2}{l^2\pi^2-z^2}$$

waarbij γ_n het positief geöriënteerde vierkant is met hoekpunten $(\pm 1\pm i)(n+\frac{1}{2})\pi$ en waarbij $z\notin\pi\mathbb{Z}$ (dat wil zeggen z is niet van de vorm $k\pi$ met $k\in\mathbb{Z}$) en $z\in I(\gamma_n)$.

(b) Laat zien dat voor $z\notin\pi\mathbb{Z}$

$$\frac{\cos z}{\sin z}=\frac{1}{z}-\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2z}{l^2\pi^2-z^2}.$$

(c) Laat zien dat

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{8}{16l^2-1}=4-\pi.$$

2. Hoeveel nulpunten heeft de functie $h(z)=z^{10}+11ze^{z+1}-9$ in de open eenheidsschijf $D(0;1)$?

3. (a) Formuleer de stelling van Liouville.

(b) Formuleer de hoofdstelling van de algebra en bewijs deze met behulp van de stelling van Liouville.

4. (a) Geef de expliciete integraalvoorstelling met behulp van de Poissonkern van de oplossing van het Dirichletprobleem $\Delta u=0$ op $D(0;1)$ met $u(e^{it})=\cos t$.

(b) Laat zien dat

$$2\pi\,r\cos(\theta)=\int_0^{2\pi}\frac{(1-r^2)\,\cos t}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}\,dt,\qquad 0\le r<1.$$

ZOZ

5. Bepaal een continue functie $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ die voor alle $t \geq 0$ voldoet aan

$$f(t) = (1 - e^{-2t}) + 2\int_0^t f(t-x)\, e^{-2x}\, dx.$$

Hint: gebruik de Laplace transformatie en herken de integraal als een convolutie.

6. Beschouw de meerwaardige functie $[\![\sqrt[3]{\dfrac{z-2}{z-1}}]\!]$.

   (a) Bepaal een snede voor deze functie, en laat zien dat er een holomorfe tak f is met $\arg\big(f(x)\big) = 0$ voor reële x voldoende groot.

   (b) Laat zien dat deze functie f holomorf is in ∞, en geef duidelijk aan wat hiermee wordt bedoeld.

   (c) Bepaal 3 termen van de Laurent reeks van f in een ring met centrum 1.

   Hint:
$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 + \mathcal{O}\left(x^5\right).$$

7. Zij $D = D(0;1)$ de open eenheidschijf, en zij $u \in \mathcal{H}(D)$ een harmonische functie (dus $u\colon D \to \mathbb{R}$ is C^2 en voldoet aan $u_{xx} + u_{yy} = 0$). Veronderstel dat u^2 ook harmonisch is op D. Bewijs dat de functie u constant is.

Succes!

NORMERING:

opgave	1	2	3	4	5	6	7	gratis
punten	20	10	15	10	10	15	10	10

Tabel van Laplace-getransformeerden

$f(t)$	$\overline{f}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) \mathrm{d}t$
1	$\frac{1}{p},\ \mathrm{Re}\, p > 0$
$t^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}},\ \mathrm{Re}\, p > 0$
$\sin(at)$	$\frac{a}{p^2+a^2},\ \mathrm{Re}\, p > \lvert \mathrm{Im}\, a \rvert$
$\cos(at)$	$\frac{p}{p^2+a^2},\ \mathrm{Re}\, p > \lvert \mathrm{Im}\, a \rvert$
$e^{at} f(t)$	$\overline{f}(p-a)$
$f(t/a),\ a > 0$	$a\overline{f}(pa)$
$f^{(n)}(t)$	$p^n \overline{f}(p) - p^{n-1} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \overline{f}^{(n)}(p)$
$\int_0^t f(t-\tau) g(\tau)\, \mathrm{d}\tau$	$\overline{f}(p)\overline{g}(p)$

Poissonkern voor de eenheidsschijf

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t) + r^2}$$