Tentamen EMV

28 juni 2016, 14:00 – 17:00 uur

Instructies:
Het tentamen bestaat uit zes opgaven, die elk vier punten kunnen opleveren. Het totaal te behalen punten is 24.

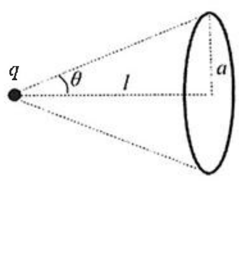
Schrijf je naam op ieder vel papier dat je inlevert. Leg steeds uit wat je doet en waarom (*alleen formules is niet voldoende*). Vectoren duidelijk aangeven met pijltjes: $\vec{r}$

1. (4 punten) Drie ladingen bevinden zich op een lijn, met in het midden een lading Q, en links en rechts daarvan op afstand d twee landingen q, zie figuur.

   (a) Bepaal de grootte van de lading Q waarvoor de krachten op de ladingen elkaar precies opheffen.

   (b) Bespreek de stabiliteit van het evenwicht van deze krachten: is het evenwicht stabiel of onstabiel, en waarom?

2. (4 punten) Een puntlading q bevindt zich in de oorsprong. Bekijk een cirkelschijf met straal a die zich op afstand l van de oorsprong bevindt, en die loodrecht staat op de verbindingslijn naar de oorsprong (zie figuur). De lading ziet de schijf onder een openingshoek θ, met $\tan\theta = a/l$. Bereken de elektrische flux door de schijf.



ZIE OMMEZIJDE

3. (4 punten) We nemen twee metalen bollen, de ene met straal R_1, en de ander met straal R_2. De bollen staan op zeer grote afstand l van elkaar. We hebben een vaste hoeveelheid lading Q die we zodanig over de twee bollen willen verdelen dat de totale potentiële energie minimaal is. Omdat de bollen ver van elkaar af staan mogen we aannemen de de lading zich gelijkmatig over het oppervlak van de bollen verdeelt.

   (a) Veronderstel eerst dat we een lading q op bol 1 hebben aangebracht, en de overige lading $Q - q$ op bol 2. Bereken nu de potentiële energie voor deze ladingsverdeling over de twee bollen, en laat zien dat deze in de benadering $l \gg R_1, R_2$ kan worden beschreven door,

   $$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\left[\frac{q^2}{R_1} + \frac{(Q-q)^2}{R_2}\right].$$

   (b) Bereken voor welke keuze van q de potentiële energie minimaal wordt.

   (c) Laat zien dat voor de verdeling gevonden in het vorige onderdeel het verschil in potentiaal tussen de twee bollen nul is.

4. (4 punten) Bekijk een oneindig lange rechte stroomdraad, die een stroom I voert. We zullen werken in cilindercoordinaten (s, ϕ, z) met de draad parallel aan de z-as. De resulterende vectorpotentiaal heeft de grootte

   $$|\mathbf{A}(s)| = A(s) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{s}{a}\right)$$

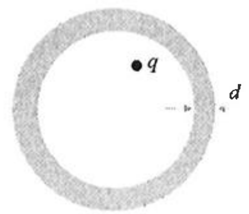
   (a) In welke richting staat de vectorpotentiaal?

   (b) Bereken het bijbehorende magnetisch veld aan de hand van de vectorpotentiaal.

   (c) Gebruik de wet van Ampère om het magneetveld uit te rekenen en controleer dat de antwoorden in overeenstemming zijn.

ZIE VOLGENDE BLAD

5. (4 punten) Een positieve puntlading q bevindt zich op een plaats buiten het centrum binnen een bolvormige geleidende schil van dikte d. We zullen aannemen dat de bolschil een perfecte gedleider vormt, en dat er geen netto lading op de bolschil zit. De schets hieronder toont de bolschil in doorsnede.



   (a) Als gevolg van de aantrekkende kracht van van de positieve lading binnen de bol vormt zich een negatieve oppervlaktelading aan de binnenkant van de bol. Bereken de totale lading van die oppervlakteladingsverdeling. Laat de individuele stappen in de berkening zien en geef bij elke stap een korte toelichting.

   (b) De ladingsverdeling is niet uniform. Bespreek of de ladinsverdeling aan de binnenzijde van de bol overal negatief is, of ook positief kan worden voor de grootste afstanden.

   (c) Geef de grootte en de verdeling van lading op de buitenkant van de bolschil.

6. (4 punten) We bekijken het elektromagnetisch veld binnen een doos met perfect geleidende wanden. De doos bestaat uit twee rechte en parallelle wanden loodrecht op de x-as en twee parallelle wanden loodrecht op de y-as. In beide gevallen staan de twee loodrechte en parallelle wanden op een afstand L van elkaar met de oorsprong als middelpunt De wanden van de doos loodrecht op de z-as staan ver weg, en kunnen we buiten beschouwing laten.

   (a) Laat zien dat het elektromagnetisch veld binnen de wanden beschreven door

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= E_0\hat{\mathbf{z}}\cos kx\cos ky\cos\omega t,\\ \mathbf{B} &= B_0\left(\hat{\mathbf{x}}\cos kx\sin ky - \hat{\mathbf{y}}\sin kx\cos ky\right)\sin\omega t,\end{aligned}$$

   voldoet aan de Maxwell vergelijkingen in de vrije ruimte.

   (b) Bepaal de relatie tussen E_0 en B_0 voor deze oplossing.

   (c) Geef de relatie tussen ω en k voor deze oplossing.

   (d) Welke waarden kan k aannemen en waardoor wordt dat bepaald?

++++++++++++ EINDE ++++++++++++++++++++

VOOR TABELLEN ZIE ACHTERZIJDE EN VOLGENDE BLAD

VECTOR IDENTITIES

Triple Products

(1) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$

(2) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

Product Rules

(3) $\nabla(fg) = f(\nabla g) + g(\nabla f)$

(4) $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}$

(5) $\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$

(6) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$

(7) $\nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f)$

(8) $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$

Second Derivatives

(9) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

(10) $\nabla \times (\nabla f) = 0$

(11) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$

FUNDAMENTAL THEOREMS

Gradient Theorem : $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$

Divergence Theorem : $\int (\nabla \cdot \mathbf{A})\, d\tau = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$

Curl Theorem : $\int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$