Tentamen EMV

27 juni 2014, 10:00 – 13:00 uur

Instructies:
Het tentamen bestaat uit vijf opgaven, waarbij het gewicht van elke opgave steeds is aangegeven. Het totaal te behalen punten is 50. Schrijf je naam op ieder vel papier dat je inlevert. Leg steeds uit wat je doet en waarom (*alleen formules is niet voldoende*). Vectoren duidelijk aangeven met pijltjes: $\vec{r}$

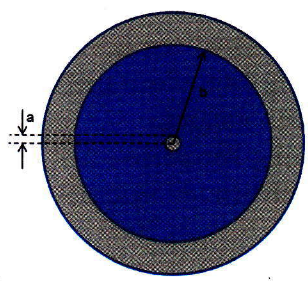
1. (12 punten) Hieronder volgen een aantal korte begripsvragen over diverse onderwerpen.

   (a) Schets de elektrische veldlijnen voor twee gelijke puntladingen $+q$ (beide positief geladen), op een onderlinge afstand d.

   (b) Wanneer een perfect geleidende bol wordt opgeladen met een lading $+q$, hoe verdeelt deze lading zich dan over de bol?

   (c) De Laplacevergelijking voor de elektrische potentiaal kan geschreven worden als $\nabla^2 V = 0$. We bekijken het ééndimensionaal probleem van de elektrische potentiaal tussen twee oneindig uitgestrekte condensatorplaten. Geef de algemene oplossing van de Laplacevergelijking voor dit ééndimensionale probleem.

   (d) In het centrum van een cilinder van lengte L en met straal b loopt een perfect geleidende draad met straal a. De cilinder zelf is gemaakt van koper, dat elektrisch geleidend is met een eindige geleidbaarheid σ. De koperen cilinder is weer omgeven door een cilindervormige perfecte geleider. De figuur hieronder toont een dwarsdoorsnede:

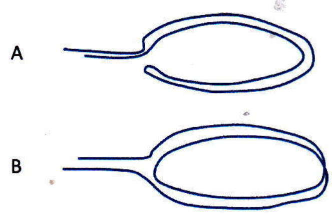
   

   Wanneer er nu een stroom I wordt aangelegd tussen de twee perfecte geleiders (dus tussen de centrale draad en de buitenste cilinder), geef dan een uitdrukking voor de stroomdichtheid op elk punt binnen de koperen cilinder.

   (e) Geef voor de cilinder uit het vorige onderdeel ook een uitdrukking voor de grootte en richting is van het elektrisch veld binnen de koperen cilinder.

ZIE OMMEZIJDE

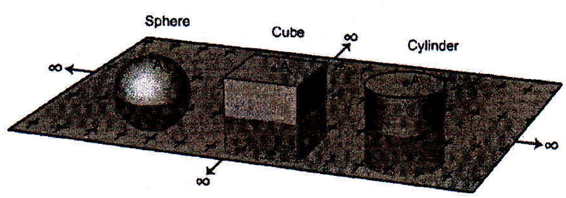
(f) Bekijk de twee onderstaande draadprofielen. Wanneer we een stroom door de draden sturen, voor welke van de twee meten we dan de grootste zelfinductie? Geef een toelichting op je antwoord.



2. De wet van Gauss (6 punten)

   (a) Hieronder volgt een aantal beweringen die betrekking hebben op de toepassing van de wet van Gauss. Geef voor elk van deze beweringen aan of deze waar of niet waar is, en geef een korte uitleg van je antwoord.
   (i) Wanneer het elektrische veld op ieder punt van een Gaussisch oppervlak nul is, moet de totale hoeveelheid omsloten lading nul zijn.
   (ii) Wanneer een Gaussisch oppervlak geen lading omsluit, moet het veld overal op het oppervlak gelijk zijn aan nul.
   (iii) Wanneer de netto electrische flux door het Gaussisch oppervlak nul is, moet het veld overal op dat oppervlak nul zijn.

   (b) Beschouw drie Gaussische oppervlakken van verschillende vorm: een bol, een kubus, een cilinder. Elk van die Gaussische oppervlakken wordt doorsneden door een oneindig uitgestrekte plaat met uniforme ladingsdichtheid σ, dat wil zeggen dat ieder object half boven en half onder de plaat ligt. Het punt A ligt steeds midden op de top.



   We willen nu met behulp van de wet van Gauss het elektrisch veld in A berekenen. Geef van elk van de volgende beweringen aan of deze waar of niet waar is, en geef een korte toelichting op je antwoord.
   (i) De berekening kan alleen met de bol worden uitgevoerd, die is hiervoor symmetrisch genoeg.
   (ii) De berekening kan alleen met de cilinder worden uitgevoerd, want deze heeft cirkelvormige symmetrie, en door de zijwanden gaat geen flux.
   (iii) De berekening kan zowel met de cilinder als met de kubus worden uitgevoerd, want elk object met zijwanden loodrecht op de plaat en boven- en ondervlak evenwijdig aan de plaat is goed.
   (iv) De berekening kan zowel met de bol als met de cilinder, want die hebben een cirkelvormige doorsnede.
   (v) De berekening kan met alle drie de oppervlakken worden uitgevoerd, want ze zijn symmetrisch.

ZIE VOLGENDE BLAD

3. (12 punten)
Een cirkelvormige platte schijf met straal R (zie onderstaande figuur) heeft een uniforme oppervlakteladingsverdeling σ.

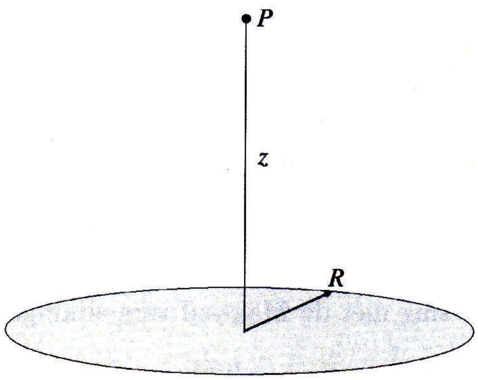
(a) Wanneer de totale lading op de schijf wordt gegeven door Q, wat is dan de oppervlakteladingsverdeling σ?

(b) Gebruik cilindercoordinaten (s, ϕ, z) en bekijk een infinitessimaal stukje van het oppervlak op afstand s van het centrum, met lading dq gegeven door d$q = \sigma$d$s\, s$dϕ. Geef eerst alleen voor dit kleine ladingselementje de uitdrukking voor de sterkte en richting van het elektrisch veld in het punt P op hoogte z boven het centrum van de schijf.

(c) Bepaal nu de grootte en richting van het totale elektrisch veld in het punt P. *Hint: Hieronder worden een aantal mogelijk bruikbare integralen gegeven.*

(d) Bekijk het gedrag van het veld in de limiet $z >> R$. Bespreek of dit resultaat redelijk is.

(e) Bekijk het gedrag van het veld in de limiet $R \to \infty$. Bespreek of dit resultaat redelijk is.



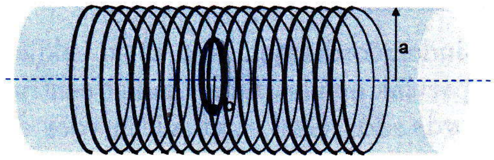
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right); \qquad \int \frac{x\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}; \qquad \int \frac{x\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{2}\ln\left(a^2+x^2\right)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}; \qquad \int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$$

ZIE OMMEZIJDE

4. (10 punten)
Bekijk de onderstaande figuur, waarin een oneindig lange spoel wordt verbeeld, met straal a. Binnen die spoel bevindt zich een enkele geleidende ring met straal b.



   (a) Wanneer er een stroom door de spoel loopt zal er een magneetveld worden opgewekt. Schets de veldlijnen. en geef aan hoe grootte en richting van het magneetveld verandert met de positie in de ruimte (hier alleen kwalitatief; nog geen berekening nodig).

   (b) Wanneer we weten dat het aantal windingen per lengte-eenheid n is, en de stroomsterkte is I, bereken dan de sterkte van het magneetveld binnen de spoel. $\int \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$

   (c) Hoe groot is de magnetische flux in de ring met straal b binnen de spoel?

   (d) Wat is nu de constante van mutuele inductie?

   (e) Veronderstel dat er een stroom I loopt in de binnenste ring. Schets de veldlijnen als gevolg van deze kringstroom.

   (f) Wanneer de stroom in de binnenste ring verandert met $\dot{I} = \mathrm{d}I/\mathrm{d}t$, dan wordt er een emf opgewekt in de spoel die eromheen loopt. Bereken deze emf.

5. (10 punten)
We gaan aan de slag met de Maxwell vergelijkingen.

   (a) Geef de vier Maxwell vergelijkingen in differentiaalvorm voor de vrije ruimte, dat wil zeggen dat er nergens ladingen of stromen zijn.

   (b) Laat zien dat $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx)\hat{z}$ een oplossing is die voldoet aan alle vier de vergelijkingen, en bepaal wat dan het bijbehorende magnetische veld wordt.

   (c) Wat is de relatie tussen ω en k?

   (d) Hoe groot is de energie per volume-eenheid van deze elektromagnetische golf?

VOOR TABELLEN ZIE VOLGENDE BLAD

VECTOR IDENTITIES

Triple Products

(1) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$

(2) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

Product Rules

(3) $\nabla(fg) = f(\nabla g) + g(\nabla f)$

(4) $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}$

(5) $\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$

(6) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$

(7) $\nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f)$

(8) $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$

Second Derivatives

(9) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

(10) $\nabla \times (\nabla f) = 0$

(11) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

FUNDAMENTAL THEOREMS

Gradient Theorem : $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$

Divergence Theorem : $\int (\nabla \cdot \mathbf{A})\, d\tau = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$

Curl Theorem : $\int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$

Cartesian. $d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$; $d\tau = dx\,dy\,dz$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial t}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

Spherical. $d\mathbf{l} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$; $d\tau = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial t}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{r}}$$
$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial t}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2}$$

Cylindrical. $d\mathbf{l} = ds\,\hat{\mathbf{s}} + s\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$; $d\tau = s\,ds\,d\phi\,dz$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial s}\hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s}\frac{\partial t}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(s v_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \left[\frac{1}{s}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{s}} + \left[\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial s}(s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{z}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial t}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$