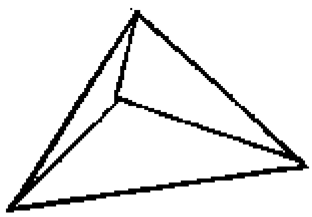
Tentamen Elektromagnetisme I, 29 juni 2001,

10.00 – 13.00 uur

Opmerkingen:

- **U mag uw boek (Griffiths) bij dit tentamen gebruiken; geen aantekeningen of uitwerkingen van vraagstukken.**
- **Schrijf duidelijk.**
- **Vergeet niet uw naam op ieder vel papier.**
- **Als u een e-mail adres vermeldt krijgt u de uitslag zo spoedig mogelijk per e-mail.**
- **Geef niet alleen een antwoord, ook argumenten of berekeningen.**
- **Vergeet niet de eenheden en/of de richting als dat van toepassing is.**

Opgave 1



Een lading Q bevindt zich in het middelpunt van een gelijkzijdige tetraëder (vier gelijkzijdige driehoeken tegen elkaar aan). Hoe groot is de oppervlakte integraal van het elektrische veld over het oppervlak van een van de driehoeken.

Oplossing:

Vanwege de symmetrie van het de tetraëder zijn de oppervlakte integralen over de vier driehoeken gelijk. Volgens de wet van Gauss is de totale oppervlakte integraal over het gesloten oppervlak gelijk aan Q/ε_0, de oppervlakte integraal over een driehoek is dus $Q/4\varepsilon_0$.

Opgave 2

Gegeven twee bolschillen met straal R. De ene bolschil heeft een homogene oppervlaktelading σ, de andere een homogene oppervlakte lading -σ. De bol met de positieve lading heeft het middelpunt op $\mathbf{a}_1 = (0,0,\mathbf{a})$, de bol met de negatieve lading op $\mathbf{a}_2 = (0,0,-\mathbf{a})$ Veronderstel voorlopig dat a > R, de bollen overlappen elkaar dus niet. Bereken het elektrische veld op de plaats $\mathbf{r}$, binnen en buiten de bollen.

Beschouw ook het geval dat a < R, m.a.w. de bollen overlappen elkaar.

1. Bereken het elektrische veld in de ruimte die beide bollen gemeen hebben.

2. Hangt uw antwoord af van het feit dat de bollen de zelfde straal hebben ?

3. Hangt uw antwoord af van het feit dat de bollen even grote doch tegengestelde lading hebben ?

Oplossing:

Maak gebruik van het superpositie beginsel. Buiten beide bollen is het veld dan, omdat de velden van de bollen als die van puntladingen kunnen worden geschreven, gelijk aan $\vec{\mathbf{E}} = \frac{-4\pi\mathbf{R}^2\sigma(\vec{\mathbf{r}}+\vec{\mathbf{a}})}{4\pi\varepsilon_0(\mathbf{r}+\mathbf{a})^3} + \frac{4\pi\mathbf{R}^2\sigma(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{a}})}{4\pi\varepsilon_0(\mathbf{r}-\mathbf{a})^3}$, waarbij $\vec{\mathbf{a}} = (0,0,\mathbf{a})$. Binnen de bovenste bolschil (die bij (0,0,a)) is het veld nul van de bovenste schil zelf plus het veld van de onderste bol, en dat kan weer worden geschreven als het veld van een puntlading, dus $\vec{\mathbf{E}} = \frac{-4\pi\mathbf{R}^2\sigma(\vec{\mathbf{r}}+\vec{\mathbf{a}})}{4\pi\varepsilon_0(\mathbf{r}+\mathbf{a})^3}$ en andersom voor de onderste bol.

Als de bollen overlappen dan geldt nog steeds het superpositie beginsel dus

1. het veld in de overlap is nul + nul, dus nul.
2. het hangt niet van de specifieke ladingen af.
3. het hangt niet van de specifieke stralen af.

Opgave 3

Een gelijkzijdige driehoek met zijden *a* ligt in het x-y vlak met het middelpunt in de oorsprong. Door de driehoek loopt een stroom I.

1. Geef een uitdrukking voor het magneetveld op de z-as.
2. Ga na wat de limiet is voor z >> a.
3. Geef een uitdrukking voor het magnetische dipoolmoment van deze driehoek.
4. Laat zien dat uw antwoorden onder 2 en 3 consistent zijn.

Oplossing

1. Het veld **B** op een afstand s van een geleider is (verg. 5.35) $\frac{\mu_0\mathbf{I}}{4\pi\mathbf{s}}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$ en staat loodrecht op de geleider en de op de verbindingslijn s. Recht boven het midden wordt dat, omdat $\sin\theta = \frac{\frac{\mathbf{a}}{2}}{\sqrt{\mathbf{s}^2+\frac{\mathbf{a}^2}{4}}}$, dus het veld wordt $\mathbf{B} = \frac{\mu_0\mathbf{I}}{4\pi\mathbf{s}}\frac{\mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{s}^2+\frac{\mathbf{a}^2}{4}}}$. De afstand s is gelijk aan $\mathbf{s} = \sqrt{\mathbf{z}^2+\mathbf{a}^2/12}$, de sinus van de hoek α tussen de lijn s (van het waarnemingspunt op de z-as en het midden van een van de zijden van de driehoek) en de z-as wordt gegeven door $\sin\alpha = \frac{\mathbf{a}\sqrt{3}/6}{\sqrt{\mathbf{z}^2+\mathbf{a}^2/12}}$. Het totale veld van de drie zijden van de driehoek wordt gegeven door drie maal de z-component van bovengenoemd veld, de horizontale componenten heffen elkaar op vanwege de symmetrie. M.a.w. het totale veld gericht langs de z-as wordt

$$\mathbf{B}_z = \frac{3\mu_0 \mathbf{I}}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{z}^2 + \mathbf{a}^2/12}} \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{z}^2 + \mathbf{a}^2/12 + \mathbf{a}^2/4}} \frac{\mathbf{a}\sqrt{3}/6}{\sqrt{\mathbf{z}^2 + \mathbf{a}^2/12}} =$$

$$\frac{3\mu_0 \mathbf{I}}{4\pi} \frac{\mathbf{a}^2}{\mathbf{z}^2 + \mathbf{a}^2/12} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{z}^2 + \mathbf{a}^2/3}} \frac{\sqrt{3}}{6}$$

2. De limiet voor grote z (a kan t.o.v. z worden verwaarloosd): $\mathbf{B}_z = \frac{3\mu_0 \mathbf{I}\mathbf{a}^2\sqrt{3}}{4\pi|\mathbf{z}^3|6}$
3. Het magnetisch moment, m, is I * oppervlakte = I a^2 ($\sqrt{}$3)/4, gericht langs de z-as, rechterhand regel mat de stroom.
4. Het veld recht boven of onder het magnetische moment m is $\frac{\mu_0 \mathbf{m}}{2\pi|\mathbf{z}^3|}$ en dat als de waarde voor m wordt ingevuld juist het zelfde als onder 2 gevonden.

Opgave 4

Gegeven een massieve bol met straal R en een homogene ladingsverdeling ρ. Het materiaal van de bol heeft een elektrische susceptibiliteit χ_e. Het materiaal mag als een lineair medium worden beschouwd.

1. Geef een uitdrukking voor de dielektrische verplaatsing binnen en buiten de bol.
2. Geef een uitdrukking voor het elektrische veld binnen en buiten de bol.
3. Geef een uitdrukking voor de polarisatie in de bol.
4. Geef een uitdrukking voor de gebonden volume ladingsdichtheid ρ_b.
5. Geef een uitdrukking voor de gebonden oppervlakte ladingsdichtheid σ_b.
6. Geef een uitdrukking voor de elektrische potentiaal.
7. Bereken de totale energie van het elektrische veld.

Oplossing:

1. Buiten de bol als van een puntlading $\mathbf{D} = \frac{Q\hat{\mathbf{r}}}{4\pi \mathbf{r}^2}$, met Q = $4\pi R^3\rho/3$, binnen de bol, via de wet van Gauss, bolsymmetrie, oppervlakte integraal is $4\pi r^2 D$ = volume integraal, $Q_{omsloten} = 4\pi\rho r^3/3$, $\mathbf{D} = \frac{1}{3}\rho \mathbf{r}\hat{\mathbf{r}}$.
2. Buiten de bol **E** = **D**/ε_0, binnen de bol **E** = **D**/ε = **D**/$\varepsilon_0(1+\chi_e)$, dus $Q\hat{\mathbf{r}}/4\pi\varepsilon_0 \mathbf{r}^2$ en $\mathbf{E} = \frac{\rho \mathbf{r}\hat{\mathbf{r}}}{3\varepsilon_0(1+\chi_e)}$
3. De polarisatie is $\varepsilon_0\chi_e$**E**, of **D**-ε_0**E,** dus $\mathbf{P} = \frac{\chi_e \rho}{3(1+\chi_e)}\mathbf{r}\hat{\mathbf{r}}$
4. De gebonden volume ladingsdichtheid is -∇**P** = $-\chi_e\,\rho/(1+\chi_e)$
5. De gebonden oppervlakte ladingsdichtheid is **P.n** = $\chi_e\,\rho$ R / $3(1+\chi_e)$

6. De elektrische potentiaal is de lijnintegraal over het elektrische veld. Er is alleen en r-component, dus: buiten de bol: $\mathbf{V} = -\int_{\infty}^{\mathbf{r}} \frac{\mathbf{Q}}{4\pi\varepsilon_0 \mathbf{r}'^2} \mathbf{dr}' = \frac{\mathbf{Q}}{4\pi\varepsilon_0 \mathbf{r}} = \frac{\frac{4}{3}\pi\rho\mathbf{R}^3}{4\pi\varepsilon_0 \mathbf{r}} = \frac{\rho\mathbf{R}^3}{3\varepsilon_0 \mathbf{r}}$, binnen de bol wordt dat $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \frac{\rho\mathbf{R}^2}{3\varepsilon_0} - \int_{\mathbf{R}}^{\mathbf{r}} \frac{\rho\mathbf{r}'}{3\varepsilon_0(1+\chi_\mathbf{e})} \mathbf{dr}' = \frac{\rho\mathbf{R}^2}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho\mathbf{r}^2}{6\varepsilon_0(1+\chi_\mathbf{e})} + \frac{\rho\mathbf{R}^2}{6\varepsilon_0(1+\chi_\mathbf{e})}$
7. De totale energie van het elektrische veld is $\frac{1}{2}\int \mathbf{E} \bullet \mathbf{D} d\tau = \frac{1}{2}\int_0^{\mathbf{R}} \frac{\rho^2\mathbf{r}^2}{9\varepsilon_0(1+\chi_\mathbf{e})} 4\pi\mathbf{r}^2\mathbf{dr} + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}}^{\infty} \frac{\mathbf{Q}^2}{16\pi^2\varepsilon_0\mathbf{r}^4} 4\pi\mathbf{r}^2\mathbf{dr} = \frac{4\pi\rho^2\mathbf{R}^5}{90\varepsilon_0(1+\chi_\mathbf{e})} + \frac{2\pi\rho^2\mathbf{R}^5}{9\varepsilon_0}$