# Tentamen Elektromagnetisme I, 7 augustus 2001,

# 14.00 – 17.00 uur

**Opmerkingen:**

- **U mag uw boek (Griffiths) bij dit tentamen gebruiken; geen aantekeningen of uitwerkingen van vraagstukken.**
- **Schrijf duidelijk.**
- **Vergeet niet uw naam op ieder vel papier.**
- **Als u een e-mail adres vermeldt krijgt u de uitslag zo spoedig mogelijk per e-mail.**
- **Geef niet alleen een antwoord, ook argumenten of berekeningen.**
- **Vergeet niet de eenheden en/of de richting als dat van toepassing is.**

## Opgave 1

Een gelijkzijdige driehoek met zijden *a* ligt in het x-y vlak met het middelpunt in de oorsprong. Langs de z-as loopt een draad, waardoor een stroom I loopt in de positieve z-richting. Hoe groot is de lijnintegraal van het magnetische veld **B** langs een van de zijden van de driehoek

Oplossing.

Vanwege de symmetrie zijn de drie lijnintegralen over de zijden van de driehoek gelijk. De totale lijn integraal is $\mu_0 I$ volgens de wet van Ampère. Langs een zijde is de integraal dus $\mu_0 I/3$.

## Opgave 2

Een oneindig grote geleidende plaat ligt in het x-y vlak van een Carthesisch assenstelsel. Boven de plaat bevindt een holle bolschil met daarop een homogene oppervlakte ladingsverdeling σ. De straal van de bol is R en het middelpunt van de bol bevindt zich op de plaats (0,0,a), met a > R. Geef uitdrukkingen voor de elektrische potentiaal binnen dit systeem; ook voor de ruimte binnen de bolschil.

Oplossing

Hier moet met een spiegellading worden gewerkt. M.a.w. denk een zelfde bol aanwezig op een afstand a onder het oppervlak van de geleider en geef deze spiegellading een oppervlakte lading -σ. Volgens het superpositie beginsel is dan de totale potentiaal gelijk aan de som van de potentialen van de twee bolschillen: $V = \frac{-4\pi \mathbf{R}^2 \sigma}{4\pi\varepsilon_0\,|\vec{\mathbf{r}}+\vec{\mathbf{a}}|} + \frac{4\pi \mathbf{R}^2 \sigma}{4\pi\varepsilon_0\,|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{a}}|}$. Binnen de bovenste bolschil wordt de constante bijdrage van de bovenste schil, plus de bijdrage van de onderste, dus $V = \frac{-4\pi R^2 \sigma}{4\pi\varepsilon_0 \, |\vec{r}+\vec{a}|} + \frac{4\pi R\sigma}{4\pi\varepsilon_0}$

## Opgave 3

Een gelijkzijdige driehoek met zijden *a* ligt in het x-y vlak, met één van de zijden evenwijdig aan de x-as en zodanig dat het zwaartepunt samenvalt met de oorsprong. Op de zijden van de driehoek is een elektrische lading homogeen verdeelt met een ladingsdichtheid λ per lengte eenheid.

1. Bereken het elektrische veld in het zwaartepunt van de driehoek.
2. Bereken het elektrische veld **E** (vector) op de z-as als functie van z.
3. Bereken de totale lading van de driehoek.
4. Laat zien dat het elektrische veld op grote afstand van de driehoek kan worden benaderd door dat van een puntlading in het zwaartepunt.

Oplossing:

1. Het veld in het zwaartepunt is nul, want de drie velden t.g.v. van de drie zijden van de driehoek zijn even groot en maken hoeken van $120^0$ met elkaar, zodat de resulterende vector nul is.
2. Het totale veld van de drie zijden van de driehoek is op de z-as langs die z-as gericht omdat de horizontale componenten elkaar opheffen vanwege de symmetrie. Het veld op een afstand s van een rechte ladingsverdeling, lengte *a* en ladingsdichtheid λ wordt gegeven door $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda a}{s\sqrt{s^2+(a/2)^2}}$. Dat veld is langs s gericht. De lengte van de zwaartelijn in een gelijkzijdige driehoek is $a\sqrt{3}/2$, de afstand van het zwaartepunt tot het midden van de zijden dus $a\sqrt{3}/6$. Volgens Pythagoras is dan de afstand van het midden van een zijde tot een punt *z* op de z-as gelijk aan $\sqrt{z^2+a^2/12}$. Dat is dus de afstand *s* uit de bovenstaande vergelijking.. De bijdrage van een zijde moet worden vermenigvuldigd met de cos van de hoek tussen de z-as en de verbindingslijn tussen het punt op de z-as en het midden van de zijde. Die cos is gelijk aan z/s. Het totale veld van de driehoek komt daarmee op **E**=(0,0,$E_z$), met $E_z$ gelijk aan

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\lambda a}{\sqrt{z^2+a^2/12}\sqrt{z^2+a^2/12+a^2/4}}\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2/12}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\lambda az}{\left(z^2+a^2/12\right)}\frac{1}{\sqrt{z^2+a^2/3}}$$

3. De totale lading van de driehoek is 3λa
4. Als de absolute waarde van z veel groter is dan a, dan kan bovenstaande vergelijking worden benaderd door $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\lambda a}{z^2}\frac{z}{\sqrt{z^2}}$, wat getransformeerd naar bolcoördinaten wordt $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\lambda a}{r^2}$, m.a.w. het veld van een puntlading in de oorsprong (== het zwaartepunt) met een totale lading 3λa

## Opgave 4

Gegeven een massieve oneindig lange cilinder met straal R waardoor evenwijdig aan de as van de cilinder een stroomdichtheid loopt, waarbij de grootte van de stroomdichtheid gelijk is aan *b*s, waarbij s de afstand is tot de as van de cilinder en *b* een constante. Het materiaal van de cilinder is homogeen en heeft een magnetische susceptibiliteit $\chi_m$. Het materiaal mag als een lineair medium worden beschouwd.

1. Geef een uitdrukking voor het hulp veld **H** binnen en buiten de cilinder.
2. Geef een uitdrukking voor het magnetische veld **B** binnen en buiten de cilinder.
3. Geef een uitdrukking voor de magnetisatie **M** in de cilinder.
4. Geef een uitdrukking voor de gebonden volume stroomdichtheid $\mathbf{J}_b$.
5. Geef een uitdrukking voor de gebonden oppervlakte stroomdichtheid $\mathbf{K}_b$.
6. Maak tenslotte een schets met daarin de verschillende vectoren.

Oplossing:

1. Volgens symmetrie en de richting van de stroomdichtheid: **H** heef alleen een $\phi$-component. Volgens de wet van Ampère is de kringintegraal van **H** gelijk aan de omsloten stroom. De stroom omsloten door een cirkel met het middelpunt op de z-as en straal r (cirkel evenwijdig aan x-y vlak) is $I_{omsloten} = \int_0^r 2\pi \mathbf{b}\mathbf{s}^2 \mathbf{ds} = \frac{2\pi}{3}\mathbf{b}\mathbf{r}^3$. De lijn integraal is gelijk aan $2\pi s\mathbf{H}_\phi$. Dus binnen de cilinder geldt $\mathbf{H}_\phi=\pi bs^3/3.2\pi s=bs^2/3$; buiten de cilinder geldt $\mathbf{H}_\phi=I/\pi s$, met $I = 2\pi bR^3/3$.
2. Buiten de cilinder geldt $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$, dus $\mathbf{B}_\phi=\mu_0 I/\pi s$, binnen de cilinder wordt dit $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$, met $\mu=\mu_0(1+\chi_m)=\mu_m(1+\chi_m)bs^2/3$, $\mathbf{B}_s=0$, $\mathbf{B}_z=0$.
3. $\mathbf{M}=\chi_m\mathbf{H}$, dus $\mathbf{M}_\phi=\chi_m bs^2/3$; $\mathbf{M}_s=0$, $\mathbf{M}_z=0$.
4. $\mathbf{J}_b=\nabla\mathrm{x}\mathbf{M} = 0\ \mathbf{e}_s + 0\ \mathbf{e}_\phi + 1/s\ [\ \delta/\delta s\ (s\chi_m bs^2/3)\ ]\ \mathbf{e}_z = \chi_m\ b\ s\ \mathbf{e}_z$.
5. $\mathbf{K}_b=\mathbf{M}\mathrm{x}\mathbf{e}_n= -\ \mathbf{M}_\phi = -\ \chi_m bR^2/3$.