Tentamen Elektromagnetisme I, 17 september 2001,

15.00 – 17.30 uur

Opmerkingen:

- **U mag uw boek (Griffiths) bij dit tentamen gebruiken; geen aantekeningen of uitwerkingen van vraagstukken.**
- **Schrijf duidelijk.**
- **Vergeet niet uw naam op ieder vel papier.**
- **Als u een e-mail adres vermeldt krijgt u de uitslag zo spoedig mogelijk per e-mail.**
- **Geef niet alleen een antwoord, ook argumenten of berekeningen.**
- **Vergeet niet de eenheden en/of de richting als dat van toepassing is.**

Opgave 1

Twee concentrische cirkelvormige geleiders liggen in het x-y vlak, met hun middelpunten in de oorsprong. Door de binnenste cirkel loopt een stroom I, door de buitenste een stroom I/2 in tegengestelde richting.

De binnenste cirkel heeft een straal a, de buitenste een straal $a\sqrt{2}$.

1. Hoe groot is het magneetveld **B** in de oorsprong ?
2. Hoe groot is het magnetische dipoolmoment van dit set geleiders ?

Oplossing:

1. Het veld in het middelpunt van een cirkelvormige geleider is $\mu_0 I/2R$, van de binnenste cirkel dus $\mu_0 I/2a$, van de buitenste $-\mu_0 I/4a\sqrt{2}$, totaal dus $\mu_0 I(4-\sqrt{2})/8a$.
2. Het totale dipoolmoment is nul, namelijk $Ia^2 - 2a^2 I/2 = 0$.

Opgave 2

Een (mathematisch) elektrisch dipool moment p bevindt zich op een afstand a van een oneindig lange draad met een homogene ladingsverdeling λ. Het dipoolmoment is evenwijdig aan het elektrische veld van die draad.

Hoe groot is de kracht die op dit dipoolmoment wordt uit geoefend en welke richting heeft die kracht ?

Oplossing

Kies cilindercoördinaten met de ladingsdrager langs de z-as. Het van de lading is dan alleen langs s gericht, dus $\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \mathbf{s}}$, dus $E_s=\lambda/2\pi\varepsilon_0 s$. De kracht wordt door de gradiënt van $(\mathbf{p}.\nabla)\mathbf{E}$ gegeven, dus $\mathbf{F} = \frac{-\mathbf{p}\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \mathbf{s}^2}$, dus naar de draad gericht.

Opgave 3

Gegeven een holle bolschil, straal R en homogene oppervlaktelading σ. Om deze bol ligt een laag dielektricum, met een binnenstraal R en een buitenstraal b. De relatieve dielektrische constante van dit dielektricum is ε_r.

1. Geef een uitdrukkingen voor de dielektrische verplaatsing **D** binnen de bol, binnen het dielektricum en buiten het dielektricum.
2. Geef een uitdrukkingen voor het elektrische veld **E** binnen de bol, binnen het dielektricum en buiten het dielektricum.
3. Geef een uitdrukkingen voor de polarisatie **P** binnen de bol, binnen het dielektricum en buiten het dielektricum.
4. Geef uitdrukkingen voor de gebonden volume ladingsdichtheid en de gebonden oppervlakte ladingsdichtheid.
5. Bereken de elektrische potentiaal van dit systeem, binnen de bol, binnen het dielektricum en buiten het dielektricum.
6. Bereken de totale energie van het elektrische veld.

Oplossing:

De dielektrische verplaatsing wordt gegeven door de vrije lading. Beschouw als Gauss oppervlak een bol met straal r, middelpunt zelfde als de holle bolschil. Vanwege de symmetrie van het probleem zijn **E**, **D** en **P**, maar het middelpunt gericht (of er vanaf) en hebben zij de zelfde absolute waarde op een bol concentrisch met de bolschil. M.a.w. **D** etc hebben de vorm $(D_r,0,0)$.

Binnen de bolschil is geen lading, m.a.w. voor $r < R$ is de omsloten lading 0, dus $D_r = 0$.

Voor $r > R$ is de omsloten lading $4\pi R^2\sigma$, de oppervlakte integraal over D bedraagt $4\pi r^2 D_r$, dus $D_r = R^2\sigma/r^2$.

Vanwege $E = D / \varepsilon$, geldt binnen de bol $E_r = 0$, in het dielektricum, $E_r = R^2\sigma/\varepsilon_0\varepsilon_r\, r^2$ en voor $r>b$ geldt $E_r = R^2\sigma/\varepsilon_0\, r^2$

P wordt gevonden uit $\mathbf{D} = \varepsilon_0\, \mathbf{E} + \mathbf{P}$, m.a.w., voor $r < R$ en $r > b$ geldt $P_r = 0$, voor $R<r<b$ volgt $P_r = R^2\sigma/r^2 - R^2\sigma/\varepsilon_r\, r^2 = R^2\sigma\, r^{-2}\, (1 - 1/\varepsilon_r) = R^2\sigma\, r^{-2}\, (\varepsilon_r - 1) / \varepsilon_r$.

De gebonden lading wordt gegeven door $\rho_b = -\, \nabla.\mathbf{P}$, $\sigma_b = \mathbf{P.n}$. De eerste is nul, de divergentie van de polarisatie is nul. De tweede is, omdat **P** loodrecht op het oppervlak staat, $-\sigma\, (\varepsilon_r - 1) / \varepsilon_r$ op het binnenste oppervlak van het dielektricum en $R^2\sigma\, b^{-2}\, (\varepsilon_r - 1) / \varepsilon_r$ op de buitenkant.

De elektrische potentiaal buiten het dielektricum (r>b) is dat van een puntlading in de oorsprong ter grootte van $4\pi R^2\sigma$, m.a.w. $V(r > b) = R^2\sigma / \varepsilon r$.

Binnen het dielektricum geldt $V(R<r<b) = -\int E_r\,dr = R^2\sigma/\varepsilon_0\varepsilon_r r - R^2\sigma/\varepsilon_0\varepsilon_r b$. Omdat V(r=b) continue moet zijn volgt: $V(R<r<b) = -\int E_r\,dr = R^2\sigma/\varepsilon_0\varepsilon_r r - R^2\sigma/\varepsilon_0\varepsilon_r b + R^2\sigma / \varepsilon b$.

Tenslotte is V binnen de bol constant, omdat het veld nul is, dus

$V(r<R) = R^2\sigma/\varepsilon_0\varepsilon_r R - R^2\sigma/\varepsilon_0\varepsilon_r b + R^2\sigma / \varepsilon b$

De totale energie van het elektrische veld wordt gevonden uit de helft van de volume integraal van **D.E**.

Binnen de bol is de bijdrage daarvan nul.

In het dielektricum volgt $W = \frac{1}{2}\int_R^b 4\pi r^2 D_r E_r dr = \frac{2\pi R^4\sigma^2}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{b}\right)$, voor het deel buiten het dielektricum volgt $W = \frac{1}{2}\int_b^\infty 4\pi r^2 D_r E_r dr = \frac{2\pi R^4\sigma^2}{\varepsilon_0 b}$, de totale energie wordt door optellen gevonden.

Opgave 4

Een dikwandige metalen (geleidende) bolschil heeft een binnenstraal a en een buitenstraal b. In het middelpunt van bolschil bevindt zich een puntlading Q.

1. Geef uitdrukkingen voor het elektrische veld binnen de schil, in de schil en buiten de schil.

2. Maak een grafiek van de grootte van het **E**-veld als functie van de afstand tot het middelpunt van de bolschil.

3. Maak een grafiek van de grootte van de potentiaal als functie van de afstand tot het middelpunt van de bolschil.

Oplossing:

Het probleem is volledig bolsymmetrisch. Het elektrische veld kan dus worden geschreven als $\mathbf{E}=(E_r,0,0)$. Het meest geschikte Gauss volume is een bol met straal r.

Binnen de geleider (r<a) is de omsloten lading dan altijd de puntlading Q, m.a.w. $E_r = Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$.

In de geleider moet E nul zijn. Dus moet op de binnenkant van de bolvormige geleider een oppervlakte lading zijn geïnduceerd zodanig dat $4\pi a^2\sigma = -Q$. Omdat de geleider als geheel niet geladen is, moet op het buitenoppervlak een oppervlakteladings dichtheid zijn geïnduceerd zodanig dat $4\pi b^2\sigma = -Q$. Voor het elektrische veld buiten de geleidende bol betekent dat de omsloten lading nu weer Q is, dus $E_r = Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$.