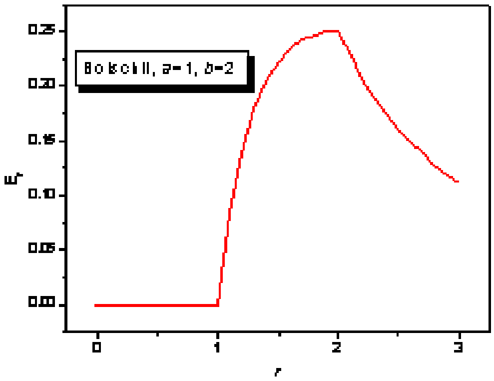

Tentamen Elektromagnetisme I, 28 juni 2002,

Oplossing 1

Het probleem heeft bolsymmetrie. Het elektrische veld kan worden geschreven als $\boldsymbol{E} = (E_r, 0, 0)$. Beschouw een bol met straal r als Gauss oppervlak. Voor $r < a$ wordt geen lading omsloten en is E_r nul. Voor $a < r < b$ geldt dat de oppervlakte integraal gelijk is aan $4\pi r^2 E_r$, terwijl de omsloten lading wordt gegeven door: $Q_{enc} = \int_a^r \frac{k}{r'^2} 4\pi r'^2 \, dr' = 4\pi k(r-a)$, waardoor het veld wordt gegeven door: $E_r = k(r-a)/\varepsilon_0 r^2$. Voor $r > b$ wordt de omsloten lading gegeven door $4\pi k(b-a)$. Het veld dus door $E_r = k(b-a)/\varepsilon_0 r^2$.

Oplossing 2

Dit probleem kan met een spiegellading worden opgelost, het is equivalent aan twee bollen, waarbij de tweede zich op $(0,0,-a)$ bevindt en negatief geladen is.

Het veld van een homogeen geladen bol (met het middelpunt in de oorsprong): buiten is dat van een puntlading: $\mathbf{E} = (E_r, 0, 0)$, met $E_r = \rho R^3/3\varepsilon_0 r^2$ en binnen de bol $E_r = \rho r/3\varepsilon_0$. De potentiaal van een homogeen geladen bol is dus: buiten de bol $V(\mathbf{r}) = \rho R^3/3\varepsilon_0 r$ en binnen de bol $\rho R^2(3 - r^2/R^2)/6\varepsilon_0$.

Buiten de bol en voor positieve z wordt de potentiaal die van twee tegengestelde puntladingen: $V(\mathbf{r}) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}\right]$, binnen de bovenste bol (de werkelijke bol) is de potentiaal een gevolg van de potentiaal binnen de geladen bovenste bol en die van buiten de spiegel-bol:

$$V(\mathbf{r}) = \left[\frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0}\left(3 - \frac{x^2+y^2+(z-a)^2}{R^2}\right) - \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}\right].$$

Voor negatieve z is de potentiaal nul vanwege het geleidende vlak.

Oplossing 3

De potentiaal op het oppervlak van een geladen (geleidende) bol is $Q/4\pi\varepsilon_0 R$, dus Q_A moet drie maal zo groot zijn als Q_B. Het elektrische veld aan de oppervlakte is gelijk aan de oppervlaktelading σ/ε_0, de oppervlakken verschillen een factor 9, dus E_A is een derde van E_B.

Oplossing 4

Het veld van de draad op de positieve x-as is in de positieve y richting en wordt gegeven door:

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi z}\left(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}\right)$$

Voor het stuk op de negatieve *x*-as geldt hetzelfde.

De halve cirkel geeft een bijdrage tot het veld in de *z*-richting gelijk aan (bedenk dat als θ de hoek is tussen de z-as en de lijn van de bron naar de waarnemer, dat dan de veldbijdrage evenredig is met sin(θ), en dat sin(θ) gelijk is aan de overstaande zijde (=1) gedeeld door de schuine zijde):

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{\pi} R\frac{1}{z^2+1}\frac{1}{\sqrt{z^2+1}}\,d\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\pi R}{(z^2+1)^{3/2}}$$

De bijdrage van de halve cirkel tot een horizontale component is in de positieve *y*-richting (de componenten in de *x*-richting compenseren elkaar vanwege de symmetrie). De grootte van de horizontale bijdrage is (bedenkend dat de bijdrage nu evenredig is met de cos(θ), dat is de aanliggende zijde (=z) gedeeld door de schuine zijde)

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{\pi} R\frac{1}{z^2+1}\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\sin\phi\,d\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2zR}{(z^2+1)^{3/2}}$$

Totaal wordt het veld dus:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(0, \left\{\frac{2}{z} - \frac{2}{z\sqrt{z^2+1}} + \frac{2zR}{(z^2+1)^{3/2}}\right\}, \frac{\pi R}{(z^2+1)^{3/2}}\right)$$

Oplossing 5

Het dipoolmoment van de staaf is

$\mathbf{p} = \int \mathbf{r}'\lambda(\mathbf{r}')\,d\tau'$. Dus $\mathbf{p}_x = \int_{-L}^{L} x'\lambda(x')\,dx' = a\int_{-L}^{L} x'^2\,dx' = \frac{2}{3}aL^3$

De staaf ondervindt een torsie gelijk aan **p** x **E =** $(0,-2aL^3E_0/3,0)$

Oplossing 6

De stroomdichtheid is $I/\pi R^2$. Er is cilindersymmetrie, velden en magnetisatie zijn alleen in de ϕ-richting. Volgens Ampère is de kring integraal van **H** gelijk aan $2\pi s H_\phi$, de omsloten stroom is Is^2/R^2, dus $H_\phi = Is/2\pi R^2$. $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$, $M_\phi = \chi_m H_\phi = \chi_m Is/2\pi R^2$. Het veld $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M})$, $B_\phi = \mu_0(1+\chi_m)\, Is/2\pi R^2 = \mu_0\mu_r\, Is/2\pi R^2$.

De gebonden volume stroomdichtheid $\vec{J}_b = \vec{\nabla}\times\vec{M} = \left(\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s} sM_\phi\right)\hat{z} = \left(\frac{1}{s}\frac{I\chi_m}{2\pi R^2}\frac{\partial}{\partial s}s^2\right)\hat{z} = \frac{I\chi_m}{\pi R^2}\hat{z}$

De gebonden oppervlakte stroomdichtheid $\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n} = -\frac{I\chi_m R}{2\pi R^2}\hat{z} = -\frac{I\chi_m}{2\pi R}\hat{z}$

De eerste geïntegreerd over het volume (is vermenigvuldigd met volume, want constante) levert $I\chi_m$, de tweede over het oppervlak $-I\chi_m$, dus de totale gebonden stroomdichtheid is nul.

Buiten de draad zijn de velden die van een oneindig dunne draad in vacuüm: $H_\phi = I/2\pi s$ en $B_\phi = \mu_0 I/2\pi s$.