Uitwerkingen hertentamen EM1, 5 aug 2003

Deel A

1b; 2a,b,d,e; 3,5; 4b; 5a; 6d; 7a; 8a,c,d; 9e; 10b

Deel B

Opgave 1:

a. Zie Griffiths 2.42 (huiswerkopgave), en de definitie van de divergentie in bolcoordinaten. Merk op dat de ladingsdichtheid $\rho(\mathbf{r})$ is een scalaire functie van **r,** $\rho(\mathbf{r})$ is <u>geen</u> vektorveld.

$$\rho = \epsilon_0 \, \nabla \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \left\{ \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{A}{r}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{B\sin\theta\cos\phi}{r}\right) \right\}$$
$$= \epsilon_0 \left[\frac{1}{r^2}A + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{B\sin\theta}{r}(-\sin\phi)\right] = \boxed{\frac{\epsilon_0}{r^2}(A - B\sin\phi).}$$

b. Gegeven het elektrisch veld van een dipool $\vec{E}_{dip}(r,\theta) = \dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta})$, vinden we voor de ladingsdichtheid

$$\rho(\vec{r}) = \varepsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\varepsilon_0 p}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{2\cos\theta}{r^3} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\sin\theta}{r^3}\right\} =$$
$$\frac{p}{4\pi}\left\{\frac{2\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r} + \frac{1}{r^4\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin^2\theta\right\} = \frac{p}{4\pi}\left\{\frac{-2\cos\theta}{r^4} + \frac{1}{r^4\sin\theta}2\sin\theta\cos\theta\right\} = 0$$

Deze afleiding levert op dat de ladingsdichtheid nul is. Dit kan natuurlijk niet want als er geen lading(sdichtheid) is is er ook geen elektrisch veld. En we weten van een dipool dat er een dubbellading (+ en -) in de oorsprong zit. Hier zien we dus weer het probleem dat op de ladingen (dus in de oorsprong) het veld divergeert, en de divergentie niet bepaald kan worden, of beter gezegd een delta-functie oplevert.

Opgave 2: Zie Griffiths 2.16 (huiswerkopgave) en 2.39, met figuur 2.53 (blz 106).

a. Vanwege de (oneindige) cilindersymmetrie kan het elektrisch veld alleen radieel naar buiten gericht zijn, tussen de twee cilindrische geleiders. In de geleiders geldt natuurlijk E=0.

Kies als Gauss oppervalk een cilinder met straal r (a<r<b, of r>b), coaxiaal met de binnenste geleider, met lengte L, en vlakke uiteinden loodrecht op de as. Dan geeft de wet van Gauss:

$$\oint\!\!\oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = Q_{omsloten}/\varepsilon_0 \Rightarrow 2\pi r L E = \lambda L/\varepsilon_0 \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$ voor a<r<b

Voor r>b is de omsloten lading nul, dus ook het elektrisch veld.

b. Grafiek – maak die op schaal: b = 3a, en dus verandert het elektrisch veld een factor 3 tussen de twee geleiders.

c. Potentiaal: Kies $V_{ref} = V(\infty) = 0$; Omdat E=0 langs de lijnintegraal langs een radius tot r=3a, geldt dat V = constant, dus ook V(3a) = 0 . Omdat het elktrisch veld radieel naar buiten gericht is, stijgt de potentiaal binnen de geleiders tot op het oppervlak van de binnenste geleider. Daarna is V weer constant, want E=0 in de binnenste geleider.

$$V(r) = -\int_{r_{ref}}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{3a}^{r}\frac{dr}{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{3a}; met V(a) = V(0) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln 3$$

d. $C=Q/\Delta V \Rightarrow C/L = \lambda/\Delta V = 2\pi\varepsilon_0/\ln 3$

Opgave 3: Geladen bol met diëlektrikum. Dit wordt behandeld in Griffiths als Example 4.5, blz 181, met als verschil dat de (binnen)bol nu <u>niet</u> een geleider is, maar een isolerende bol met ladingsverdeling ρ=k/r (vergelijk bv met werkgroep opgave Gr2.15).

De totale lading van de bol wordt gegeven door $Q = 4\pi\int_0^a r^2\frac{k}{r}dr = 2\pi k a^2$. Gebruik dit in Example 4.5 voor a<r<b, en r>b

Voor r<a krijgen we de aanpak met een Gauss oppervlak etc, zodat $4\pi r^2 E = 2\pi\varepsilon_0 k r^2$

zodat $\vec{E} = \frac{k}{2\varepsilon_0}\hat{r}$, radieel naar buiten. Merk op dat de grootte van **E** constant is in de bol.

Verder $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} = kr/2$, en $\mathbf{P} = 0$, voor r<a

Voor a<r<b: $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r = \varepsilon_0(1+\chi_e)$, en u kunt blz 181 gebruiken, en formule 4.23, zodat

$\vec{D} = \frac{Q_{omsloten}}{4\pi r^2} = \frac{ka^2\hat{r}}{2r^2}$, $\vec{E} = \vec{D}/\varepsilon$, en $\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} = \frac{ka^2\chi_e\hat{r}}{2(1+\chi_e)r^2}$

Voor r>b: $\vec{D} = \frac{Q_{omsloten}}{4\pi r^2} = \frac{ka^2\hat{r}}{2r^2}$, $\vec{E} = \vec{D}/\varepsilon_0$ en $\mathbf{P} = 0$

Overal geldt dat E, D en P radieel naar buiten gericht zijn.

b. Potentiaal: Kies referentiepunt $V_{ref} = V(\infty) = 0$. U moet dan het elektrisch veld over 3 gebieden integreren om V(0) te bepalen, en V(r) voor de drie gebieden b<r, a<r<b, r<a. Ik bereken hier V(0) en V(r<a). Zorg ervoor dat V continu is bij de grenzen r=a en r=b.

$$V(0) - V(\infty) = -\int_{\infty}^{0} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{\infty}^{b} \frac{ka^2}{2\varepsilon_0 r^2} dr - \int_{b}^{a} \frac{ka^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon_r r^2} dr - \int_{a}^{0} \frac{k}{2\varepsilon_0} dr = \frac{ka^2}{2\varepsilon_0} \left[\frac{1}{b} + \frac{1}{\varepsilon_r a} - \frac{1}{\varepsilon_r b} + \frac{1}{a} \right]$$

en $V(r) = V(0) - \dfrac{kr}{2\varepsilon_0}$, dus lineair in r.

c. Elektrische energie (vergelijk met Gr 4.26). U moet gebruiken formule 4.58, en dan weer integreren over de drie gebieden:

$$W = \tfrac{1}{2} \iiint \vec{D} \cdot \vec{E}\, d\tau = 2\pi \int_{0}^{a} DEr^2 dr + 2\pi \int_{a}^{b} DEr^2 dr + 2\pi \int_{b}^{\infty} DEr^2 dr = \frac{\pi k^2 a^4}{2\varepsilon_0} \left[\frac{1}{3a} + \frac{1}{\varepsilon_r} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{b} \right]$$

Opgave 4: Zie ook Tentamen EM 1 van 2 juli 1999

a. Het magnetisch veld van een dipool langs de z-richting is gegeven in bolcoordinaten op blz 246, formule 5.86:

$B_{dip}(\vec{r}) = \dfrac{\mu_0 m_0}{4\pi r^3}(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta})$; het homogene magneetveld $\vec{B} = -B_0 \hat{z}$ wordt in bolcoordinaten geschreven als (zie binnenkant achterkaft van Griffiths)

$B_{hom}(\vec{r}) = -B_0 \hat{z} = -B_0(\cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta})$, zodat we krijgen voor het totaal magneetveld

$$\vec{B}_{tot}(\vec{r}) = \vec{B}_{dip}(\vec{r}) + \vec{B}_{hom}(\vec{r}) = \left[\frac{2\mu_0 m_0}{4\pi r^3} - B_0 \right] \cos\theta\,\hat{r} + \left[\frac{\mu_0 m_0}{4\pi r^3} + B_0 \right] \sin\theta\,\hat{\theta}$$

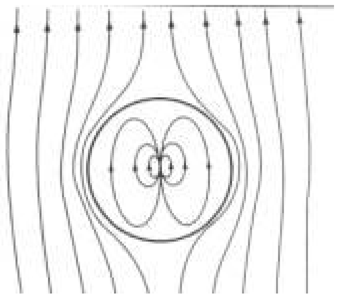
b. Zie onder (Griffiths 5.55)

c. Waneer snijdt een veldlijn niet een bolvormig oppervlak? Wanneer de veldlijnen bij dat bolvormig oppervlak alle raaklijnen zijn, ofwel geen component in radiele richting hebben. We zien uit bovenstaande vergelijking voor B_{tot}, dat de r-component $B_r = 0$ wanneer de eerste term binnen vierkante haken nul is, en dit geldt dan voor elke hoek θ, omdat de factor cosθ buiten de haakjes valt, en er geen term met θ binnen de vierkante haken voorkomt. Die term kan dus nul gemaakt worden voor een vaste waarde van r, ofwel op een bol.

d. Zie hieronder – helaas is z-richting naar beneden-

Problem 5.55

From Eq. 5.86, $\mathbf{B}_{\text{tot}} = B_0\,\hat{\mathbf{z}} - \frac{\mu_0 m_0}{4\pi r^3}(2\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}})$. Therefore $\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{r}} = B_0(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{r}}) - \frac{\mu_0 m_0}{4\pi r^3}2\cos\theta = \left(B_0 - \frac{\mu_0 m_0}{2\pi r^3}\right)\cos\theta$. This is zero, for all θ, when $r = R$, given by $B_0 = \frac{\mu_0 m_0}{2\pi R^3}$, or $\boxed{R = \left(\frac{\mu_0 m_0}{2\pi B_0}\right)^{1/3}}$. Evidently no field lines cross this sphere.



Deze waarde van R kan ook verkregen worden uit de volgende overweging. Stel dat er inderdaad zo'n bol is om de oorsprong, dan geldt dit zeker ook langs de z-richting.

Voor $\theta = 0$ geldt $\vec{B}_{dip}(r,0,\varphi) = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi r^3}2$, en dit moet voor de juiste r = R dus tegengesteld zijn aan $B_{hom} = B_0$, zodat $R^3 = \frac{\mu_0 m_0}{2\pi B_0}$.

e. Er is geen enkel fundamenteel verschil in de formules voor elektrische en magnetische dipolen, dus uiteraard geldt hetzelfde voor de elektrische situatie: Een elektrische dipool in een homogeen elektrische veld.

Opgave 5: Zie tentamen EM1 van 30 juni 2000, opgave 4, met iets andere getallen