Beantwoording van de vraagstukken van Tentamen EM1 van 27 juni 2005:

Deel A: 1c; 2b,c,e ; 3b; 4e; 5a; 6d; 7b; 8e;

Deel B: Schrijf $f = (4\pi\varepsilon_0)^{-1}$

1. Potentiaal van een puntlading Q of van een bolsymmetrische ladingsverdeling buiten die ladingsverdeling is: V(r) = fQ/r, dus hier Q=A/f.
De ladingsverdeling is dus eindig, en ρ(r) = 0 voor r>R.
Wanneer de potentiaal gegeven is , geldt $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$.
Voor bolsymmetrie $\vec{\nabla} V(\vec{r}) = \hat{r}\,{\partial V}/{\partial r}$.
Dus voor r>R: $\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{A}{r^2}\hat{r}$

voor r<R: $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) = -\dfrac{\partial V}{\partial r}\hat{r} = -\dfrac{A}{2R}\cdot\dfrac{-2r}{R^2}\hat{r} = \dfrac{A}{R^3}\vec{r} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\vec{r}$
De ladingsdichtheid wordt verkregen uit het elektrisch veld met de divergentie, in bolcoordinaten, waarbij alleen de radiele afgeleide telt:

$$\rho(\vec{r}) = \varepsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \varepsilon_0 \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^3}{\partial r} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \rho_0 = \frac{3A\varepsilon_0}{R^3} \quad \text{voor r<R.}$$

Dus een uniforme ladingsverdeling.
Voor r>R geldt ρ=0; de divergentie of deltafunctie speelt alleen een rol voor r=0, en we kijken hier voor r>R.

2. Griffiths 2.16 en 2.24.
Het is belangrijk op te merken dat een Gauss oppervlak wordt gekozen, en dat dit cilindrisch is. De cilindrische symmetrie zorgt ervoor dat er alleen een radiele component E(s) is. Dus bij het berekenen van de flux door het gekozen Gauss oppervlak vallen de bijdragen van de vlakke stukken weg omdat E daar loodrecht op de normaal op het oppervlak staat.
Het oppervlak van een cilinder wand is 2πsl, de inhoud is $\pi s^2 l$.
Zo krijgen we:

s<a: $\vec{E}(s) = \dfrac{\rho s}{2\varepsilon_0}\hat{s}$

a<s<b: $\vec{E}(s) = \dfrac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 s}\hat{s}$

s<b: Geen omsloten lading, dus E = 0.

Per lengte eenheid compenseert de volume lading in de binnencilinder de oppervlaktelading (aan de binnenkant) van de buitengeleider:

$$\pi a^2 \rho = -2\pi b \sigma_b \quad dus \quad \sigma_b = -\frac{a^2}{2b}\rho$$

De grafiek is nu gemakkelijk, maar moet op schaal. Maximum van elektrisch veld bij s=a: $E(a)=\frac{\rho a}{2\varepsilon_0}$; en bij s=b geldt dan: $E(b)=\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 b}=E(a)\frac{a}{b}$. Dus geen kwadratische afhankelijkheid!!

Potentiaal: Let goed op het referentiepunt. Normaal kiezen we bij een eindige ladingsverdeling V(∞) = 0. Omdat E = 0 voor s>b, geldt dus ook V(b) = 0, en we kunnen de lijn integraal uitrekenen vanaf s=b.
De 1/r afhankelijkheid van het elektrische veld voor a<s<b levert een natuurlijke logaritme op, de lineaire afhankelijkheid voor a<s levert een kwadratische s-afhankelijkheid van de potentiaal op. Let op dat er continuiteit is voor s=a.
Uiteraard moet de potentiaal maximaal zijn voor s=0 (aangenomen dat ρ positief is).

Dit levert: Voor a<s<b : $V(s)=\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\ln\frac{b}{s}$ (Klopt: V(b) = 0, en V(s<b) > 0)

en voor a<s: $V(s)=V(a)-\frac{\rho s^2}{4\varepsilon_0}+\frac{\rho a^2}{4\varepsilon_0}=\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}+\frac{\rho}{4\varepsilon_0}(a^2-s^2)$, zodat

$V(0)=\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}+\frac{\rho a^2}{4\varepsilon_0}$, en voor V(a) is er continuïteit.

Elektrische energie in de coaxiale situatie (per lengte eenheid):

U kunt uitrekenen $w=\frac{W}{l}=\frac{\varepsilon_0}{2}\int_{1meter}E^2 d\tau$ of $w=\frac{W}{l}=\frac{1}{2}\int_{1meter}\rho V d\tau$;
U mag niet gebruiken w = Q.ΔV. In de eerste plaats wordt dan Q meestal fout gekozen, en als voor ΔV=V(b) – V(a) wordt genomen, wordt ook de energie in de binnencilinder niet meegenomen.
De volume integraal wordt een twee dimensionale integraal, want we berekenen per lengte-eenheid, en er is geen hoekafhankelijkheid, dus de hoekintegraal levert een factor 2π. De eenvoudige cilindrische s-integraal van het elektrische veld is dan $w=\frac{\varepsilon_0}{2}2\pi\int_0^a sE^2(s<a)\,ds+\frac{\varepsilon_0}{2}2\pi\int_0^a sE^2(a<s<b)\,ds=\frac{\pi\rho^2a^4}{4\varepsilon_0}\left(\frac{1}{4}+\ln\frac{b}{a}\right)$

Gebruikt u de tweede uitdrukking (met ladingsdichtheid en potentiaal), dan hebt u alleen een integraal voor a<s, want ρ(a<s<b) = 0:

$w=\frac{1}{2}\int_{1meter}\rho V d\tau=\frac{1}{2}\rho\cdot 2\pi\int_0^a s\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}+\frac{\rho}{4\varepsilon_0}(a^2-s^2)\,ds$,
met uiteraard hetzelfde antwoord.
Deel e: Alle lading in de binnencilinder gaat naar het buitenoppervlak bij straal a. De oppervlaktelading op de binnengeleider wordt nu gegeven door

$\pi a^2\rho=2\pi a\sigma_a \quad dus \quad \sigma_a=\frac{a}{2}\rho$; merk op dat de oppervlakte ladingen op de binnen- en buitengeleider niet gelijk zijn, maar uiteraard wel de lading per lengte-eenheid.

deel f: De capaciteit (per lengte eenheid) wordt gegeven door de lading per lengte-eenheid $\frac{Q}{l} = 2\pi a\sigma_a = -2\pi b\sigma_b$, en het potentiaalverschil tussen a en b:
$V(a) - V(b) = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$, zodat $\frac{C}{l} = \frac{Q}{l\,\Delta V} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln b/a}$

OPGAVE 3:

Biot-Savart: $d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|(\vec{r} - \vec{r}')|^3}$ ofwel $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|(\vec{r} - \vec{r}')|^3}$
De integratie is langs de stroomdraad, en **dl'** is in de richting van de stroom.
De vector ***r*** = (**r-r'**) is van bronpunt (dus het stroomelementje) naar veldpunt (de meesten hadden dit fout!). Opmerkelijk is dat de bijdrage tot **B** van een stroomelementje **dl'** loodrecht staat op de richting van dat stroomelementje en loodrecht op de afstandsvector van bron naar het punt waar we het veld berekenen. De grootte van het veld neemt kwadratisch af met de afstand |**r-r'**| , en het veld is evenredig met de stroom.

deel b: In de rechte stukjes staat is de afstandsvector evenwijdig aan het lijnelement dus het vectorproduct is nul. Bij de bogen staat de afstandvector loodrecht op het lijnelement, dus het uitwendig product is maximaal (sinus is 1). Verder is de afstand bij elk boogstuk constant, maar verschillend voor de twee boogstukken.
En de lengte van een kwartcirkel is ook bekend.
Wat de richting betreft: De buitenboog levert een uitwendig product dat in de –z-richting wijst. De binnenboog in de +z-richting. Omdat de binnenboog dichterbij is, is die bijdrage het grootst (de kortere lengte weegt niet op tegen de kortere afstand die er omgekeerd kwadratisch in komt). Dus

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{kwartbuitenboog} \frac{-\hat{z}}{b^2} ds + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{kwartbinnenboog} \frac{+\hat{z}}{a^2} ds = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{-1}{b^2}\frac{\pi b}{2} + \frac{1}{a^2}\frac{\pi a}{2}\right)\hat{z}$$

OPGAVE 4:

Belangrijk is dat u geen fouten maakt in het berekenen van de rotatie in bolcoordinaten. Het wordt ook eenvoudiger als u de dipool in de oorsprong , in de z-richting kiest.
Dan: $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m\sin\theta}{r^2}\hat{\varphi}$; andere componenten van A zijn nul.

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, A_\varphi)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(-\frac{\partial}{\partial r} rA_\varphi\right)\hat{\theta} = \frac{\mu_0 m}{4\pi}\left[\frac{2\cos\theta}{r^3}\hat{r} + \frac{\sin\theta}{r^3}\hat{\theta}\right]$$

en we hebben al eerder gezien dat dit het veld van een dipool is, evenals de gegeven uitdrukking . De twee kunnen in elkaar worden overgeschreven door de notatie
$\vec{m} = (\vec{m}.\hat{r})\hat{r} + (\vec{m}.\hat{\theta})\hat{\theta} = m\cos\theta\,\hat{r} - m\sin\theta\,\hat{\theta}$.

U kunt de oplossing ook algemener maken door te schrijven

$$B = \nabla \times A = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^2} .$$

U kunt dit omschrijven met productregel 8, en u moet bedenken dat ***m*** een dipoolmoment is, en elke afgeleide van ***m*** is dus nul. En tenslotte moet u het nulpunt (de positie van de dipool) vermijden. Dan krijgt u hetzelfde antwoord.

Deel b: zie boek

Deel c: Alleen maar invullen $U = -\vec{m}_1 \cdot \vec{B}_2$

deel 4: Uitschrijven met de cosinussen, en dan moet de energie geminimaliseerd worden als functie van beide hoeken. Dus de afgeleiden moeten tegelijk nul zijn. Dit levert een orientatie $\theta_1 = \theta_2 = 0 \quad of \quad \theta_1 = \theta_2 = \pi$.

OPGAVE 5:

a. De eerste stroomkring heeft een magnetisch moment $\vec{m}_1 = I_1 \vec{a}_1$.

Definitie van inductie: $M_{21} = \dfrac{\Phi_2}{I_1} = \dfrac{\vec{B}_1 \cdot \vec{a}_2}{I_1}$

Hierbij is aangenomen dat de stroomkringetjes klein genoeg zijn ofwel ver genoeg van elkaar verwijderd dat het veld van 1 constant is over het oppervlak van 2. Invullen in de uitdrukking voor B van een dipool (uit Opgave 4) levert het gewenste antwoord.

b. De geïnduceerde spanning in kring 1 door een stroomverandering in kring 2 levert:

$$= -\frac{d\Phi_1}{dt} = -M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

c. De verrichte arbeid is het ontwikkelde vermogen geïntegreerd over de tijd dat I_2 verandert:

$$\left.\frac{dW}{dt}\right|_1 = - \quad I_1 = M I_1 \frac{dI_2}{dt} \quad zodat \quad W = \int \left.\frac{dW}{dt}\right|_1 dt = M I_1 I_2$$