① a differentiaal vorm

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}$$

integraal vorm

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \qquad \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{a} = 0 \qquad \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

b $[V] = [\int \vec{E}\cdot d\vec{l}] = [\vec{E}][dl] = [\vec{F}/Q]\,m = [\vec{F}]\frac{m}{As}$

$= kg\frac{m}{s^2}\,\frac{m}{As} = \frac{kg\,m^2}{A\,s^3}$

② a 2, alleen ii

i is onjuist omdat een klein veld ~~over~~ door een groot opperulakte een kleine flux kan geven: $\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{a}$

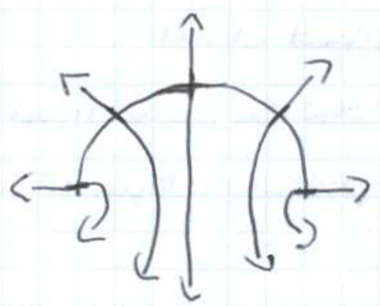
iii is onjuist omdat op S_1 bijvoorbeeld de velden door 2 stukjes tegenoverstaand oppervlakte elkaar kunnen opheffen

b 4, de veldsterktes zijn hetzelfde in E_2, maar niet in E_1

In E_2 is er rotatie symmetrie rond ~~een~~ iedere willekeurige as; in E_1 is dit niet meer het geval (er is bijvoorbeeld nog wel rotatie symmetrie als over een hoek van 90° in het equator vlak wordt gedraaid, dus het veld in A en C is in E_1 nog wel hetzelfde)

③ a Het veld is symmetrisch onder rotatie om de z-as, dus is alleen het veld in het x-z-vlak weergegeven

dicht bij

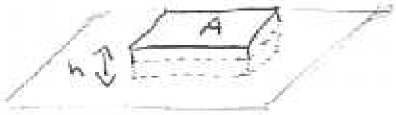


merk op: veldlijnen loodrecht op oppervlak

ver weg

veld van een puntbron

Voor het berekenen van de discontinuiteit gebruiken we een kleine "Gaussian pillbox":



met kleine hoogte h en klein oppervlak A

Omdat A klein is, is het oppervlak parallel aan de halve bol en is het elektrisch veld constant over het oppervlakte

Via de wet van Gauss geldt dus:

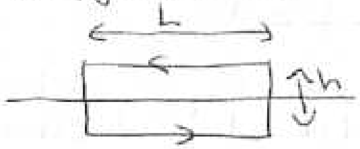
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{enc}$$

$$E^{\perp}_{onder} A - E^{\perp}_{boven} A = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

← de zijkanten worden klein gekozen zodat hier geen flux doorheen gaat

$$E^{\perp}_{onder} - E^{\perp}_{boven} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Als we nu een van de zijwanden van het doosje als loopje kiezen:



Kunnen we de hoogte h weer zo klein kiezen dat de bijdrage van de zijkanten aan de kringintegraal 0 is:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$E^{\parallel}_{boven} \cdot L - E^{\parallel}_{onder} \cdot L = 0$$

$$E^{\parallel}_{boven} = E^{\parallel}_{onder}$$

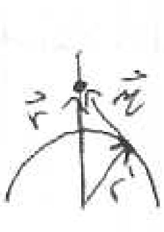
samengevat $\vec{E}_{boven} - \vec{E}_{onder} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{r}$

b $V(\vec{r}) = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\mathscr{r}} d\vec{r}\,'$

$\vec{r}$: punt waar de potentiaal berekend wordt

$\vec{r}\,'$: punt waar zich lading bevindt die de potentiaal veroorzaakt

$\vec{\mathscr{r}} = r - r'$: afstand van lading tot "potentiaal punt"



c $V(0) = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d\vec{r}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}'|} d\vec{r}'$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sigma}{R} R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sigma R \, 2\pi = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$$

d $\vec{\mathscr{r}} = \vec{r} - \vec{r}' \quad \mathscr{r} = |\vec{\mathscr{r}}| = \sqrt{\vec{\mathscr{r}} \cdot \vec{\mathscr{r}}} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta}$

$= \sqrt{z^2 + R^2 - 2zR\cos\theta}$

↳ omdat punt r op de z-as ligt en θ de hoek met de z as is

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sigma}{\sqrt{z^2+R^2+2zR\cos\theta}} R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \frac{\sigma R^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot 2\pi \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin\theta}{\sqrt{z^2+R^2+2zR\cos\theta}} d\theta$$

$$= \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0} \frac{1}{zR} \sqrt{z^2+R^2-2zR\cos\theta}\,\Big|_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0} \frac{1}{zR} \left[\sqrt{z^2+R^2+2zR} - \sqrt{z^2+R^2}\right]$$

$$= \frac{\sigma R}{2z\varepsilon_0} \left[(z+R) - \sqrt{z^2+R^2}\right]$$

als $z=0$ geldt $\sqrt{z^2+R^2} = \sqrt{R^2} = R$

$V(0) = \frac{\sigma R}{2z\varepsilon_0}[z+R-R] = \frac{\sigma R}{2z\varepsilon_0} z = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$ klopt!

voor $z >> R$ geldt $\sqrt{z^2+R^2} \approx z$

$V(z) = \frac{\sigma R}{2z\varepsilon_0}[z+R-z] = \frac{\sigma R^2}{2z\varepsilon_0}$ dit gaat als $\frac{1}{z}$, zoals de potentiaal van een puntlading

(4) a Gebruik een concentrisch bolvormig Gauss oppervlak met straal r; vanwege symmetrie is het elektrisch veld constant over en loodrecht op dit oppervlak, dus buiten:

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{enc}$

$|\vec{E}| \oint d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$

$|\vec{E}| 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \rightarrow |\vec{E}| = \frac{R^3\rho}{3\varepsilon_0 r^2} \quad \vec{E} = \frac{R^3 \rho}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

Binnen de bol:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{enc}$$

$$|\vec{E}| \oint d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$|\vec{E}| 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$|\vec{E}| = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \qquad \vec{E} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r} = \frac{\rho \vec{r}}{3\varepsilon_0}$$

b

$$\sigma_b = \vec{P}\cdot\hat{n}\big|_{opp} = k\vec{r}\cdot\hat{r}\big|_{opp} = kr\big|_{opp} = kR$$

$$\rho_b = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -\vec{\nabla}\cdot k\vec{r} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^3 kr) = -\frac{1}{r^2} 3kr^2 = -3k$$

c Met het zelfde Gauss oppervlak buiten:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{enc}$$

$$|\vec{E}| \oint d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\oint \rho_b dV + \oint \sigma_b da\right)$$

$$|\vec{E}| 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(-3k\,\frac{4}{3}\pi R^3 + kR\cdot 4\pi R^2\right)$$

$$|\vec{E}| 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(-4\pi kR^3 + 4\pi kR^3\right) = 0$$

$$|\vec{E}| = 0 \qquad \vec{E} = 0$$

Binnen gebruiken we de bij a afgeleide formule

$$\vec{E} = \frac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon_0} = \frac{-3k\vec{r}}{3\varepsilon_0} = \frac{-k\vec{r}}{\varepsilon_0}$$

d

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho_{free}}{\varepsilon_0} + \frac{\rho_{bound}}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho_f}{\varepsilon_0} - \frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}\right) = \frac{\rho_f}{\varepsilon_0}$$

definieer nu $\vec{E} + \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} = \vec{D}$ zodat $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \frac{\rho_f}{\varepsilon_0}$

e De relevante randvoorwaarden zijn:

$$\vec{D}^{\perp}_{boven} - \vec{D}^{\perp}_{onder} = \sigma_f$$

$$\vec{E}^{\perp}_{boven} - \vec{E}^{\perp}_{onder} = \sigma/\varepsilon_0$$

$$\vec{E}^{\perp}_{boven} = 0 \ , \ \vec{E}^{\perp}_{onder} = -\frac{k\vec{r}}{\varepsilon_0} \qquad \text{uit c}$$

$$\vec{E}^{\perp}_{boven} - \vec{E}_{onder} = 0 - -\frac{kR}{\varepsilon_0} = \frac{kR}{\varepsilon_0} = \sigma_b/\varepsilon_0 \quad \text{klopt!}$$

$$\vec{D}^{\perp}_{boven} = \vec{E}^{\perp}_{boven} + \frac{\vec{P}^{\perp}_{boven}}{\varepsilon_0} = 0 + \frac{0}{\varepsilon_0} = 0$$

$$\vec{D}^{\perp}_{onder} = \vec{E}^{\perp}_{onder} + \frac{\vec{P}^{\perp}_{onder}}{\varepsilon_0} = -\frac{kR}{\varepsilon_0} + \frac{1}{\varepsilon_0}kR = 0$$

$$\vec{D}^{\perp}_{boven} - \vec{D}^{\perp}_{onder} = 0 - 0 = 0 = \sigma_f \quad \text{klopt!}$$

5 a

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2}\vec{m} \times \hat{r} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2}\hat{z} \times \hat{r} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2}\sin\theta\,\hat{\phi}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\mu_0 m}{4\pi r^2}\sin\theta\,\hat{\phi}\right) = \frac{\mu_0 m}{4\pi}\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{1}{r^2}\sin\theta\right)\hat{r}\right.$$

$$\left. -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{1}{r^2}\sin\theta\right)\hat{\theta}\right]$$

$$= \frac{\mu_0 m}{4\pi}\left[\frac{1}{r^3\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin^2\theta)\hat{r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\hat{\theta}\right]$$

$$= \frac{\mu_0 m}{4\pi}\left[\frac{1}{r^3\sin\theta}2\sin\theta\cos\theta\,\hat{r} + \frac{\sin\theta}{r}\frac{1}{r^2}\hat{\theta}\right]$$

$$= \frac{\mu_0 m}{4\pi}\left[\frac{2\cos\theta}{r^3}\hat{r} + \frac{\sin\theta}{r^3}\hat{\theta}\right]$$

$$= \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right) \quad \text{klopt!}$$

b

$$B_z = \vec{B}\cdot\hat{z} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r}\cdot\hat{z} + \sin\theta\,\hat{\theta}\cdot\hat{z}\right) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$B_z = 0 \Rightarrow 2\cos^2\theta = \sin^2\theta$$

Als $\theta = 45° = \pi/4$ is $2\cos^2\theta = 1$ en dalend en $\sin^2\theta = 1/2$ en stijgend, de hoek zal dus groter zijn dan $45°$

c $m = IA = Iab$ de richting wordt gegeven met de rechter-handregel:

Voor de rest van de vraag zie boek p 256-257

6 a zie boek example 5.6 p 218

b $M_{21} = \Phi_2 / I_1$

Omdat spoel 2 ver af staat van kring 1 kunnen we de benadering gebruiken dat het veld van kring 1 constant is over het oppervlak van spoel 2 en gegeven wordt door a dus:

$$M_{21} = \Phi_2 / I_1 = \frac{\mu_0 I_1 R^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}} \cdot \pi a^2 \cdot N \Big/ I_1 = \frac{\mu_0 \pi a^2 R^2 N}{2(R^2+z^2)^{3/2}}$$

c zie boek p 310-311

d
$$\Phi_1 = M_{12} I_2 = M_{21} I_2 = \frac{\mu_0 \pi a^2 R^2 N I_0 \cos \omega t}{2(R^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = \frac{\mu_0 \pi a^2 R^2 N I_0 \omega \sin \omega t}{2(R^2+z^2)^{3/2}}$$

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{R_1} = \frac{\mu_0 \pi a^2 R^2 N I_0 \omega \sin \omega t}{2R_1(R^2+z^2)^{3/2}}$$

let op R = straal stroomlus

R_1 = weerstand stroomlus