# Uitwerkingen toets EMV

24 april 2012

1. (a) Bij aanwezigheid van een statische ladingsverdeling $\rho(\mathbf{r})$ wordt het elektrische veld bepaald door

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\mathscr{r}^2} \hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} \, \mathrm{d}\tau',$$

waarin $\mathcal{V}$ het volume van de ladingsverdeling, $\mathbf{r}'$ de positie van een ladingselement en $\boldsymbol{\mathscr{r}}$ de verschilvector tussen een ladingselement en de positie waarop het veld bepaald wordt is.

(b) De te gebruiken Maxwellvergelijking luidt

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}.$$

Als we dit over een volume $\mathcal{V}$ integreren dat de lading omsluit en gebruik maken van de stelling van Gauss krijgen we

$$\oiint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \frac{Q_{omsloten}}{\varepsilon_0},$$

waarin $\partial\mathcal{V}$ de rand van $\mathcal{V}$ is.

(c) De arbeid om een lading door een elektrisch veld te verplaatsen is gedefinieerd als

$$W = q \int \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell},$$

waarbij $\mathbf{E}$ het reeds aanwezige elektrische veld is. We plaatsen de ladingen één voor één. Bij het plaatsen van de eerste lading is het aanwezige elektrische veld gelijk aan $\mathbf{0}$, en kost het dus geen arbeid de lading te plaatsen. Bij de tweede lading is echter sprake van een veld $\mathbf{E} = q/(4\pi\varepsilon_0 \mathscr{r}^2)\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}$. Als we onze assen zo kiezen dat de eerste puntlading zich in de oorsprong bevindt kunnen we de tweede lading langs de $z$-as inbrengen. De totale arbeid is dan

$$W = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_\infty^d \frac{\mathrm{d}z}{z^2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d}.$$

(d) De divergentie van dit veld is gelijk aan

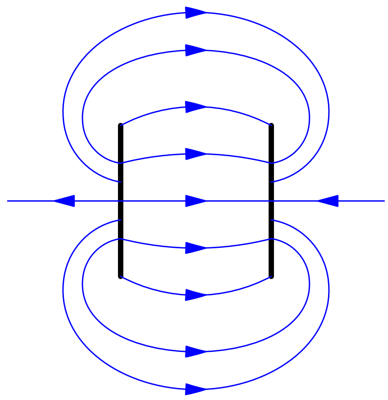
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = -\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right).$$

Voor de rotatie geldt

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = \mathbf{0}.$$

Omdat het veld rotatievrij is kan dit veld dus inderdaad een elektrisch veld beschrijven.

(e) [1] Als we de randeffecten in beschouwing nemen zien de veldlijnen van het door de platen opgewekte elektrische veld er ongeveer uit als in onderstaande figuur:



Hierbij is de plaat links positief geladen, de plaat rechts negatief.

(f) Bij verwaarlozing van de randeffecten nemen we in feite aan dat de geleidende platen oneindig zijn. Het veld van één plaat is dan uniform. We weten dat de velden van de platen buiten de tussenruimte even groot maar tegengesteld gericht zijn; het totale veld buiten de platen is dan gelijk aan 0. Voor de ruimte tussen de platen maken we gebruik van de definitie van de potentiaal; hieruit halen we dan dat

$$E = \frac{V}{d},$$

[1] In deze opgave staat een fout: het was enkel de bedoeling hier een schets van de veldlijnen te geven.

zodat

$$\mathbf{E} = \frac{V}{d}\hat{\mathbf{r}}_{\pm},$$

waarin $\hat{\mathbf{r}}_{\pm}$ de richting van positief geladen plaat naar negatief geladen plaat aangeeft. Aangezien we het potentiaalverschil uit kunnen drukken als

$$V = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$

is de capaciteit dan $C = Q/V = Q\varepsilon_0/\sigma d$. Omdat de lading op een plaat met oppervlakte $A$ gelijk is aan $\sigma A$ is de capaciteit dus gelijk aan

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}.$$

2. (a) We gebruiken tweemaal de wet van Gauss. Omdat buiten de bol $Q_{omsloten} = q$ en het veld radieel gericht is geldt daar

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}.$$

Op een afstand $r$ binnen de bol is het veld nog steeds radieel gericht, maar is de omsloten lading $Q_{omsloten} = \frac{r^4}{R^4}q$. Het veld is dan

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qr^2}{R^4}\hat{\mathbf{r}}.$$

(b) Met het referentiepunt op oneindig wordt de potentiaal buiten de bol gegeven door

$$V_{buiten} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}.$$

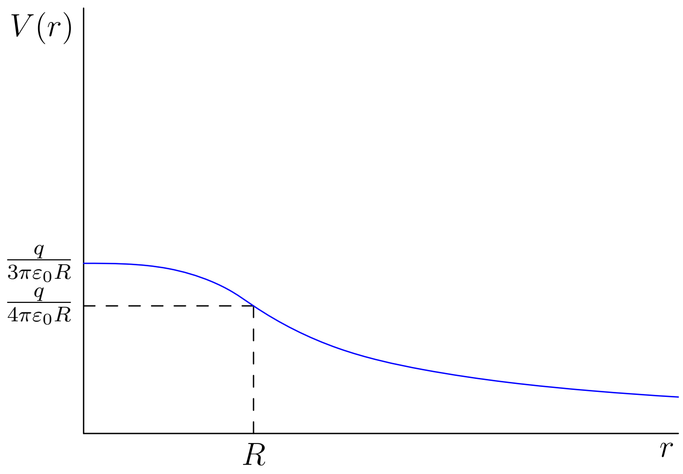
Binnen de bol geldt $V(r) = V_{buiten}(R) + V_{binnen}(r)$, waarin $V_{binnen} = \frac{q}{12\pi\varepsilon_0 R}\left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right)$. In totaal is de potentiaal dan gelijk aan

$$V(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} & r \geq R \\ \frac{q}{12\pi\varepsilon_0 R}\left(4 - \frac{r^3}{R^3}\right) & r < R \end{cases}.$$

Een schets hiervan staat op de volgende pagina.

(c) De potentiële energie kan berekend worden met

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} E^2 \,\mathrm{d}\tau.$$




Figuur 1: Schets bij de potentiaal van opgave 2b.

Aangezien beide ladingsverdelingen buiten de bol hetzelfde veld opleveren komt enig verschil van binnen. Als alle lading aan de oppervlakte van de bol zit is het veld in de bol gelijk aan nul, het veld bij een lineaire verdeling is berekend bij (a). Het uitrekenen van de integraal geeft een energieverschil van

$$\Delta W = \frac{1}{14}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

3. (a) We plaatsen een gaussisch pillendoosje rond (een deel van) het oppervlak. Omdat we geen randeffecten hebben staat het veld normaal op het oppervlak en is de flux door het pillendoosje dus gelijk aan $2AE$. Tegelijkertijd is de omsloten lading gelijk aan de ladingsdichtheid maal de oppervlakte van de plaat die het pillendoosje omsluit, dus $\sigma A$. Uit de wet van Gauss volgt dan dat de grootte van het veld gelijk is aan

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Aangezien het veld normaal op het oppervlak staat, volgt dan

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{n}},$$

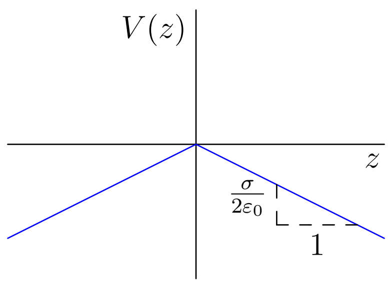
met $\hat{\mathbf{n}}$ een normaaleenheidsvector. We zien dat het veld dus onafhankelijk is van de afstand tot de plaat.

(b) De potentiaal is gegeven als

$$V = -\int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell},$$

ten opzichte van een referentiepunt $\mathcal{O} = (x_0, y_0, z_0)$. Voor de eenvoud leggen we de plaat in het vlak $z = 0$, en plaatsen we ook ons referentiepunt in dit vlak. Zowel boven als onder het $xy$-vlak is het elektrische veld uniform, met als verschil dat $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{z}}$ als $z > 0$, en $\mathbf{E} = -E\hat{\mathbf{z}}$ als $z < 0$. Aangezien de potentiaal alleen gevoelig is voor verplaatsing in de $z$-richting krijgen we dus

$$V(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|z|.$$




(c) De kracht per oppervlakte-eenheid wordt gegeven als

$$\mathbf{f} = \sigma \mathbf{E}_{gemiddeld},$$

waarin $\mathbf{E}_{gemiddeld}$ het gemiddelde veld rond het oppervlak is. Omdat het gemiddelde veld gelijk is aan $\mathbf{E}$ geldt er dus voor de elektrostatische druk

$$\mathbf{P} = \sigma \mathbf{E}.$$