final

Toets Electromagnetisme I, 3 mei 2011,

De toets bestaat uit **4** opgaven met in totaal 40 punten.

Instructies :
- schrijf je naam op *ieder* vel papier dat je inlevert.
- leg steeds uit wat je doet en waarom.
- Vectoren duidelijk aangeven met pijltjes : $\vec{r}$

<u>Opgave 1</u> (algemeen; 5x2 = 10 punten)

a. Geef de twee integraalvergelijkingen waaraan het electrisch veld $\vec{E}$ moet voldoen in aanwezigheid van een statische ladingsverdeling ρ.
b. Gebruik de formule $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{E}} = \rho/\varepsilon_0$ om de dimensie van ε_0 te bepalen in het (kg,m,s,A)-stelsel.
c. Geef de definitie voor de potentiaal $V(\vec{r})$ die heerst op een punt $\vec{r}$ ten opzichte van een referentiepunt $\mathcal{O}$ in aanwezigheid van een electrisch veld $\vec{E}$. Als je andere variabelen / symbolen gebruikt dan hier gegeven, leg uit wat ze zijn.
d. Geef de definiërende eigenschap van een ideale geleider. Laat hiermee zien dat de locale ladingsdichtheid ρ binnenin een ideale geleider gelijk is aan nul.
e. Schets de veldlijnen die gegenereerd door een puntlading *q*, geplaatst boven een ideale plaatvormige geleider (afmetingen plaat >> de afstand *q* tot plaat) en leg uit waarom je tekent wat je tekent.

<u>Opgave 2</u> (electrostatica; 2+5+3 = 10 punten)

a. Geef de algemene uitdrukking voor het electrisch veld $\vec{E}$ op een punt $\vec{r}$ als integraal over een ladingsverdeling $\rho(\vec{r}')$. Definiëer je symbolen en geef in een tekening alle relevante vectoren
b. Gegeven een recht stuk draad met lengte L, geörienteerd langs de $\hat{x}$-as. Het midden van de draad ligt op x = 0, en op de draad zit een uniforme lading λ. Bereken het electrische veld $\vec{E}$ (alle componenten) op een punt P dat op de x-as ligt op afstand *a* (>L/2) van de oorsprong.
c. Laat zien dat het $\vec{E}$-veld dat van een puntlading wordt voor *a* >> L. Geef de waarde van de puntlading.

z.o.z.

<u>Opgave 3</u> (potentiaal en lading, 5+5 = 10 punten)

Gegeven een schijf met straal R, waarop zich een oppervlaktelading σ bevindt.

a. Laat zien dat de potentiaal op een punt z boven het midden van de schijf gegeven wordt door $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2}-\ z\right)$.

b. Bereken met de potentiaal het $\vec{E}$-veld op punt z, en laat zien dat dit $\vec{E}$-veld het veld van een puntlading wordt als $z >> R$.

<u>Opgave 4</u> (Gauss en potentiaal, 5+5 = 10 punten)

Gegeven een cylinder met een straal a, waarbinnen zich een uniforme ladingsdichtheid ρ bevindt. Er omheen zit een cylinderoppervlak met straal b, waarop een *negatieve* oppervlaktelading σ zit. De totale ladingen op binnen- en buitencylinder heffen elkaar op. Noem de afstand vanaf de as van de cylinder s.

a. Bereken het $\vec{E}$-veld in de drie regionen $s < a$, $a < s < b$, en $s > b$. Plot $|E|$ als functie van s.

b. Bereken het potentiaalverschil $V(\mathrm{b}) - V(0)$ tussen een punt op de buitencylinder en een punt op de as ($s = 0$).

----- EINDE----

Additionele gegevens

Mogelijk benodigde integralen

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}} = \ln\left[x + \sqrt{(a^2+x^2)}\right] \quad ; \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sqrt{x^2+a^2}$$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} \quad ; \quad \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$\int \frac{x dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{-x}{\sqrt{(a^2+x^2)}} + \ln\left[x + \sqrt{(a^2+x^2)}\right]$$

final

Leeg

VECTOR IDENTITIES

Triple Products

(1) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$

(2) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

Product Rules

(3) $\nabla(fg) = f(\nabla g) + g(\nabla f)$

(4) $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}$

(5) $\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$

(6) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$

(7) $\nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f)$

(8) $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$

Second Derivatives

(9) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

(10) $\nabla \times (\nabla f) = 0$

(11) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

FUNDAMENTAL THEOREMS

Gradient Theorem : $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$

Divergence Theorem : $\int (\nabla \cdot \mathbf{A})\, d\tau = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$

Curl Theorem : $\int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$

VECTOR DERIVATIVES

Cartesian. $d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}; \quad d\tau = dx\,dy\,dz$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial t}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

Spherical. $d\mathbf{l} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}; \quad d\tau = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial t}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{r}}$$
$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial t}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2}$$

Cylindrical. $d\mathbf{l} = ds\,\hat{\mathbf{s}} + s\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}; \quad d\tau = s\,ds\,d\phi\,dz$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial s}\hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s}\frac{\partial t}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(s v_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \left[\frac{1}{s}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{s}} + \left[\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial s}(s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{z}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial t}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$