

# Tentamen: Fysica van Energie 2017-2018

dr. Urs Wyder (wyder@physics.leidenuniv.nl,  
Tom van der Reep MSc. Reep@physics.leidenuniv.nl

donderdag 24 mei 2018.

De toets bestaat uit 16 vragen waar een totaal van 53 punten voor te halen is.

Veel succes!!!

## 1 De Tweede Hoofdwet van de thermodynamica.

De Tweede Hoofdwet van de thermodynamica kan op meerdere equivalente manieren geformuleerd worden zonder het woord entropie te gebruiken. Eén formulering is die van Clausius en de ander is die van Kelvin.

$$K: \frac{Q_2}{Q_1} > \frac{T_2}{T_1} \quad C: \frac{Q_2}{T_2} > \frac{Q_1}{T_1}$$

Vraag 1:

1. **R 2pt.** Geef de formulering van Clausius en die van Kelvin.
2. **T1 3pt.** Laat zien dat *als* de formulering van Clausius en Kelvin identiek moeten zijn, dit betekent dat reversibele Carnot cycli moeten bestaan.
3. **T1 3pt.** Bewijs dat de stijging van entropie inderdaad leidt tot de formulering van Kelvin. Neem hiertoe een thermodynamische motor en laat zien dat als Kelvins formulering niet correct is, dat dat zou betekenen dat de entropie zou kunnen dalen.
4. **T2 4pt.** Leg uit dat een reversibel Carnot proces altijd een combinatie moet zijn van adiabaten (isentropen) en isothermen moet zijn.
5. **I 4pt.** Bereken het rendement van een denkbeeldige Carnot motor waarbij één van de temperatuurbaden een negatieve waarde heeft (en de ander een positieve) en laat zien dat ook in dit geval de entropie toeneemt. Hierbij is het rendement gedefinieerd als het deel van de warmte welke de motor ingaat en omgezet wordt in arbeid.

## 2 Een koud en een warm voorwerp in thermisch contact met elkaar

Een belangrijke bijsluiter bij het berekenen van een entropieverandering is dat dit altijd langs een "reversibel pad" gebeurd.

Beschouw twee identieke vaste voorwerpen, elk met massa  $m$  en warmtecapaciteit  $C$ . Aanvankelijk hebben de twee vaste stoffen een temperaturen  $T_{\text{hoog}}$  en  $T_{\text{laag}}$ . De voorwerpen worden vervolgens in thermisch contact met elkaar gebracht. Er stelt zich een warmtestroom in totdat beide voorwerpen dezelfde temperatuur,  $T_{\text{eind}}$  hebben.

### Vraag 2:

1. **R 1pt.** Geef de definitie van een reversibel proces.
2. **T1 3pt.** We concentreren ons nu uitsluitend op de begin- en eindtoestand van het thermodynamische evenwicht van het systeem. In de begintoestand heeft object 1 een temperatuur  $T_{\text{hoog}}$  en object 2 een temperatuur  $T_{\text{laag}}$ . In de eindtoestand hebben beide voorwerpen de temperatuur  $T_{\text{eind}}$ . Beschrijf een reversibel pad welke deze begintoestand met de eindtoestand verbindt.
3. **T2 4pt.** Bereken de entropieverandering van dit proces en laat zien dat de entropie inderdaad is toegenomen. Hierbij mag je gebruiken dat het meetkundig gemiddelde van  $T_{\text{hoog}}$  en  $T_{\text{laag}}$  ( $\frac{T_{\text{hoog}} + T_{\text{laag}}}{2}$ ) altijd groter is dan het meetkundig gemiddelde ( $\sqrt{T_{\text{hoog}} T_{\text{laag}}}$ ).

$$du = c_v dT$$

## 3 De vrije energie

De vrij energie heet niet voor niets zo.

Gegeven een systeem dat op een bepaald moment in thermisch contact staat met een temperatuurbad (thermisch evenwicht). Nu ondergaat het systeem een proces. Aan het eind van dit proces is het systeem weer in thermisch evenwicht met hetzelfde temperatuurbad (temperatuur  $T$ ). Gedurende het proces verandert het volume van het temperatuurbad niet.

3:

1. **R 3pt.** Laat zien dat voor dit soort processen de vrije energie altijd moet afnemen;

$$\Delta F \leq 0. \quad (1)$$

2. **T1 3pt.** Laat zien dat voor de totale arbeid,  $\Delta W$  welke door dit systeem verricht kan worden in dit proces moet opgaan

$$\Delta W \leq -\Delta F \quad (2)$$

3. **I 5pt.** Voor een zuiver mechanisch systeem geldt  $\Delta W = -\Delta U$ , waarbij  $U$  de interne energie representeert. Leidt af dat voor niet zuiver mechanische systemen op moet gaan

$$\Delta W - \left( \frac{1}{T} \frac{\partial \Delta U}{\partial T} \right) = -\Delta U. \quad (3)$$

HINT: Een manier om tot dit antwoord te komen is als volgt. Neem als beginpunt  $A$  en als eindpunt  $B$  bij temperatuur  $T$ . Vervolgens vergelijk je dit met het proces op temperatuur  $T + dT$  van  $A'$  naar  $B'$ . Van  $A$  naar  $A'$  neem je als een infinitesimale transformatie van  $T$  naar  $T + dT$  waarvoor  $\Delta W = 0$ , en idem voor van  $B$  naar  $B'$ .

## 4 Het principe van de minimale energie

In de klassieke mechanica wordt een stabiel evenwicht voor een mechanisch systeem gegeven als het minimum in de (interne) energie,  $U$ . Dit gaan we proberen uit te breiden naar thermodynamische systemen. Stel je hebt een gesloten systeem waarbij geen materie of energie wordt uitgewisseld. Voor zo een systeem zal opgaan

$$\left. \frac{\partial S}{\partial X} \right|_U = 0, \quad (4)$$

waarbij  $S$  de entropie voorstelt en  $X$  een externe parameter (zoals *e.g.* volume).

4: I 4pt. Laat zien dat voor hetzelfde systeem in dezelfde toestand opgaat

$$\left. \frac{\partial U}{\partial X} \right|_S = 0. \quad (5)$$

Dit is schematisch weergegeven in figuur 1

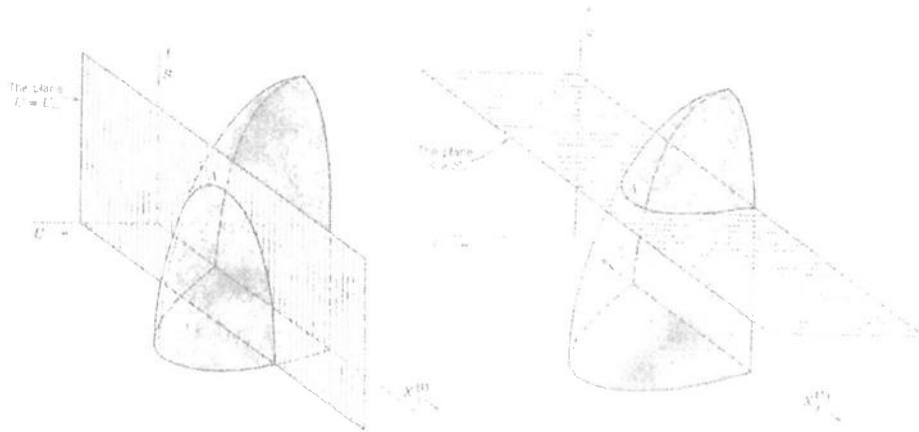


Figure 1: In toestand  $A$  is  $S$  maximaal als  $U$  constant is (linker deel plaatje). Tegelijk heeft  $U$  een minimum in toestand  $A$  als  $S$  constant wordt gehouden.

## 5 De stoomturbine als een voorbeeld van de "Rankin cyclus"

Elektriciteit wordt over het algemeen opgewekt met een stoomturbine. Nu vormt de stoomturbine een lastige cyclus omdat daarin ook de faseovergang tussen vloeibaar en gasvormig (van water) meespeelt. Daarom geven we je in een  $T$ - $S$  grafiek de daadwerkelijke cyclus van zo'n (optimale) stoomturbine; zie figuur 2. Deze optimale cyclus heet de Rankin cyclus.

5: I 6pt.

- Bepaal aan de hand van deze grafiek (figuur 2) de efficiëntie van deze stoomturbine;  $\eta_{\text{stoomturbine}}$ . Leg duidelijk uit hoe je aan je antwoord gekomen bent.

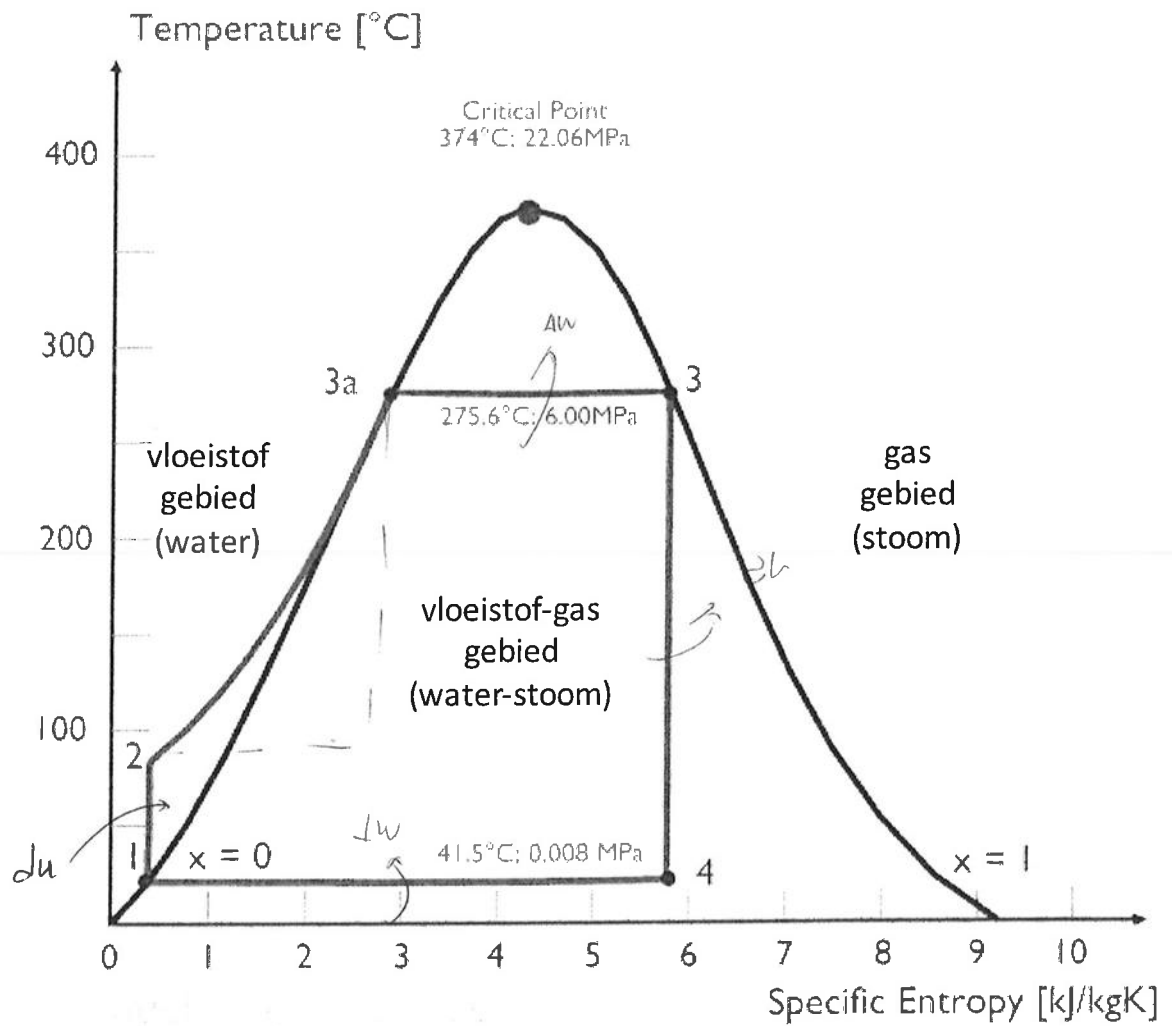


Figure 2: Optimale cyclus van stoomturbine in  $T$ - $S$  grafiek. Pas op de entropie (op de horizontale as is per kg uitgedrukt). De Rankine cyclus is in het rood afgebeeld, terwijl op de achtergrond het fase diagram van water blauwgedrukt is.

- Vergelijk vervolgens dit rendement met een ideale Carnot cyclus tussen dezelfde twee temperatuurbaden; *i.e.* bereken

$$\frac{\eta_{\text{stoomturbine}}}{\eta_{\text{Carnotcyclus}}} \quad (6)$$

## 6 Informatietheorie

Beschouw een tabel met klimaatgegevens. Stel, voor de eenvoud, dat we alleen hebben vastgelegd of het op een bepaalde dag heeft geregend of niet. Een nul betekent "geen regen" en een één betekent "wat regen" die dag. Stel dat we een lange dataset hebben voor een regenachtige locatie. We vereenvoudigen het voorbeeld door te veronderstellen dat elke dag onafhankelijk is van de vorige dag en er is een kans van 50% dat het elke dag zal regenen. Dit klimaat zullen we aanduiden als het "regenachtig klimaat". Stel dat we zo het weer 8000 dagen vastleggen.

Overweeg vervolgens een <sup>8-3 bits</sup> heel ander, veel zonniger, klimaat. Laten we opnieuw aannemen dat elke dag onafhankelijk is, maar dat het gemiddeld slechts 1 dag op de 31 regent. Een standaard dataset wordt nu gedomineerd door nullen en er zijn compactere manieren om deze gegevens op te slaan. Hier is een benadering. Verdeel de dataset in intervallen van 31 dagen en geef voor elke interval in binaire code weer (hier heb je vijf bits voor nodig) op welke dagen het regende. Het woord "11111" markeert het einde van elk interval van 31 dagen, het woord "00001" betekent regen op dag één van het interval, *et cetera..* Zo betekent dus de string

$$00010 \ 11111 \ 00001 \ 00011 \ 11111 \dots \quad (7)$$

dat het in de eerste 31 dagen periode op de 2de dag geregend heeft en in de tweede 31 dagen periode op de eerste dag en op de derde dag geregend heeft *et cetera.*

**7: T2 3pt.** Bereken het gemiddelde aantal bits dat per dag nodig is met deze compressiemethode.

**8:**

1. **T1 2pt.** Geef aan in welke dataset meer informatie zit en waarom; de tabel voor het regenachtige of de tabel voor het zonnigere klimaat.
2. **T2 3pt.** Bereken de gemiddelde hoeveelheid informatie per dag voor het regenachtige én voor het zonniger klimaat.