Uitwerkingen huiswerkopgave 1

30 mei 2011

Met dank aan Matthijs van der Wild.

1a

De bewegingsvergelijkingen,in SI-eenheden, zijn:

$$m\left(\frac{d}{dt}+\frac{1}{\tau}\right)v_x = -e\left(E_x + Bv_y\right)$$
$$m\left(\frac{d}{dt}+\frac{1}{\tau}\right)v_y = -e\left(E_y - Bv_x\right)$$
$$m\left(\frac{d}{dt}+\frac{1}{\tau}\right)v_z = -eE_z$$

We veronderstellen dat $B = 0$. Omdat het elektrisch veld frequentieafhankelijk is, zal de snelheid van de deeltjes dat ook zijn. We substitueren dus een snelheid $\vec{v}(t) = \vec{v}e^{-i\omega t}$. Dit levert:

$$m\left(-i\omega+\frac{1}{\tau}\right)v_x e^{i\omega t} = -eE_x e^{i\omega t}$$
$$m\left(-i\omega+\frac{1}{\tau}\right)v_y e^{i\omega t} = -eE_y e^{i\omega t}$$
$$m\left(-i\omega+\frac{1}{\tau}\right)v_z e^{i\omega t} = -eE_z e^{i\omega t}$$

We zien dus dat $\vec{v} = -\frac{e\tau}{m}\frac{1}{1-i\omega\tau}\vec{E} = -\frac{e\tau}{m}\frac{1+i\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2}\vec{E}$. Nu geldt $\vec{j} = -en\vec{v}$, waarbij n de elektrondichtheid is. Gebruikmakend van de wet van Ohm vinden we dan:

$$\vec{j} = \frac{ne^2\tau}{m}\frac{1+i\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2}\vec{E} = \sigma(\omega)\vec{E}$$

Ofwel:

$$\sigma(\omega) = \frac{ne^2\tau}{m}\frac{1+i\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2} = \sigma(0)\frac{1+i\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2}$$

1b

De Maxwellvergelijkingen in de gegeven situatie zijn:

$$\nabla\cdot\vec{E} = 0 \qquad (1)$$
$$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \qquad (2)$$
$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (3)$$
$$\nabla\times\vec{B} = \mu\epsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu\sigma\vec{E} \qquad (4)$$

We nemen de rotatie van (3):

$$\begin{aligned}\nabla\times\left(\nabla\times\vec{E}\right) &= \nabla\left(\nabla\cdot\vec{E}\right) - \nabla^2\vec{E}\\ &= \nabla\times -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\end{aligned}$$

Met $\nabla \cdot \vec{E} = 0$. We kunnen de volgorde van operaties omdraaien, ofwel $\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{B}\right)$. Dit levert de gevraagde vergelijking op:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Dit kan omgeschreven worden tot

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \left(1 + \frac{i\sigma}{\omega\epsilon_0}\right) \vec{E} \equiv \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \vec{E}$$

met $\epsilon(\omega) = 1 + \frac{i\sigma}{\omega\epsilon_0}$. Vullen de uitdrukking voor σ uit a hier in, dan krijgen we:

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{i\sigma(0)}{\omega\epsilon_0} \frac{1 + i\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2}$$

Als $\omega\tau \gg 1$, dan geldt $1 + i\omega\tau \approx i\omega\tau$ en $1 + (\omega\tau)^2 \approx (\omega\tau)^2$, dus volgt hieruit

$$\epsilon(\omega) \approx 1 + \frac{i^2\sigma(0)\omega\tau}{\omega\epsilon_0(\omega\tau)^2} = 1 - \frac{\sigma(0)}{\epsilon_0 \tau \omega^2}$$

Of, omdat $\sigma(0) = \frac{ne^2\tau}{m}$:

$$\epsilon(\omega) \approx 1 - \frac{ne^2}{\epsilon_0 \omega^2 m} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

2

Bekijk de stationaire toestand. In dit geval heeft $\vec{j}$ enkel een x-component, aangezien de stroom door het materiaal begrensd is. Bekijk $|\vec{j_e}| = \frac{ne^2\tau}{m}|\vec{E}| = ne|\vec{v}| = ne\mu_e|\vec{E}|$. Hieruit volgt dan $\mu_e = \frac{e\tau}{m}$. Analoog berekenen we dat $\mu_h = \mu_e$.

Er geldt dan voor elektronen:

$$v_{x,e} = -\mu_e(E_x + Bv_{y,e})$$
$$v_{y,e} = -\mu_e(E_y - Bv_{x,e})$$

Substitutie van $v_{x,e}$ in $v_{y,e}$ levert

$$v_{y,e} = -\mu_e(E_y + \mu_e B E_x + \mu_e B^2 v_y) \approx -\mu_e(E_y + \mu_e B E_x)$$

Dit levert een stroombijdrage van de elektronen $j_{y,e} = -nev_{y,e} \approx ne\mu_e(E_y + \mu_e B E_x)$.

Bekijk dan de gaten, hier geldt:

$$v_{x,h} = \mu_e(E_x + Bv_{y,h})$$
$$v_{y,h} = -\mu_e(E_y + Bv_{x,h})$$

Substitutie van $v_{x,h}$ in v_{y_h} levert dan:

$$v_{y,h} = \mu_h(E_y - \mu_h B E_x - \mu_h B^2 v_y) \approx -\mu_h(E_y - \mu_h B E_x)$$

Dit levert een stroombijdrage van de gaten $j_{y,h} = pev_{y,h} \approx pe\mu_h(E_y - \mu_h B E_x)$.

In de stationaire toestand is de y-component van de stroomdichtheid 0. Hieruit volgt dan dat $0 = j_{y,e} + j_{y,h} = E_y(pe\mu_h + ne\mu_e) + BE_x(ne\mu_e^2 - pe\mu_h^2)$, ofwel

$$E_y = BE_x \frac{ne\mu_e^2 - pe\mu_h^2}{pe\mu_h + ne\mu_e}$$

We kijken dan naar de x-component van de stroomdichtheid; substitutie van $v_{y,e}$ in $v_{x,e}$ levert, als we termen van orde B^2 verwaarlozen (v_y valt dan weg, want die is evenredig met B), $v_{x,e} = -\mu_e E_x$, ofwel $j_{x,e} = ne\mu_e E_x$. Analoog levert de bijdrage van de gaten $j_{x,h} = pe\mu_h E_x$ op. De totale x-component van de stroomdichtheid is dan $j_x = j_{x,e} + j_{x,h} = eE_x(p\mu_h + n\mu_e)$. Vullen we dit in bij de vergelijking voor E_y dan krijgen we:

$$E_y = Bj_x \frac{1}{e} \frac{n\mu_e^2 - p\mu_h^2}{(p\mu_h + n\mu_e)^2}$$

Hieruit volgt dan de de waarde van de Hallcoëfficiënt:

$$R_h = \frac{E_y}{j_x B} = \frac{1}{e} \frac{n\mu_e^2 - p\mu_h^2}{(p\mu_h + n\mu_e)^2}$$