

Antwoorden Tentamen Fysica van de Vaste Stof woensdag 2 maart 2011 , 14.00 – 17.00 uur

1. Fermigassen in astrofysica (3 + 4 + 3 = 10)

- a. Gegeven dat de massa van de zon $M_z = 2 \times 10^{30}$ kg is (voornamelijk waterstof), schat dan het aantal electronen in de zon. Een witte dwerg is een ster met ongeveer de massa van de zon en een straal R van 2×10^7 m, waarbij alle atomen volledig geïoniseerd zijn. Geef de uitdrukking voor de Fermi-energie ϵ_F , uitgedrukt in de massa en het volume van de ster, en laat zien dat $\epsilon_F = 4 \times 10^4$ eV = 6.3×10^{-15} J.
- b. In de relativistische limiet $\epsilon \gg mc^2$ wordt de relatie tussen de energie ϵ en de golfvector k van een electron in goede benadering gegeven door $\epsilon \approx \hbar kc$. Bereken de toestandsdichtheid $D(\epsilon)$ voor deze dispersierelatie, en laat zien dat de Fermi-energie in deze limiet bij benadering gegeven wordt door $\epsilon_F \approx \hbar c (3\pi^2 N/V)^{1/3}$.
- c. Bereken in de relativistische limiet de gemiddelde energie u van een electron in termen van de Fermi energie ϵ_F (bij $T = 0$), en vergelijk met de gebruikelijke situatie van het (niet-relativistische) vrije electronengas waarvan de gemiddelde energie per electron gegeven wordt door $u = 3/5 \epsilon_F$.

- (a). The Sun is mainly composed by hydrogen atoms, whose mass is approximately equal to the mass of proton m_p . Since each hydrogen atom contains one electron, the number of electrons in the Sun is:

$$N = \frac{M_\odot}{m_p} = 1.2 \times 10^{57} \quad (17)$$

if this number of electrons is contained in a white dwarf star with a radius $R_{wd} = 2 \times 10^9$ cm, the Fermi energy is:

$$\begin{aligned} \epsilon_F &= \frac{\hbar^2}{2m} \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{2/3} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(3\pi^2 \frac{N}{\frac{4\pi R_{wd}^3}{3}} \right)^{2/3} \\ &= 6.3 \times 10^{-15} \text{ J} = 4 \times 10^4 \text{ eV} \end{aligned} \quad (18)$$

- (b). In the relativistic case with a dispersion relation of $\epsilon \simeq pc = \hbar kc$, the density of states of electrons is:

$$D(\epsilon) = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 \frac{dk}{d\epsilon} = \frac{V}{\pi^2} \frac{\epsilon^2}{\hbar^3 c^3} \quad (19)$$

then the Fermi energy is determined by the condition:

$$\epsilon_F = \int_0^{\epsilon_F} D(\epsilon) d\epsilon = \frac{V \epsilon_F^3}{3\pi^2 \hbar^3 c^3} \quad (20)$$

which gives:

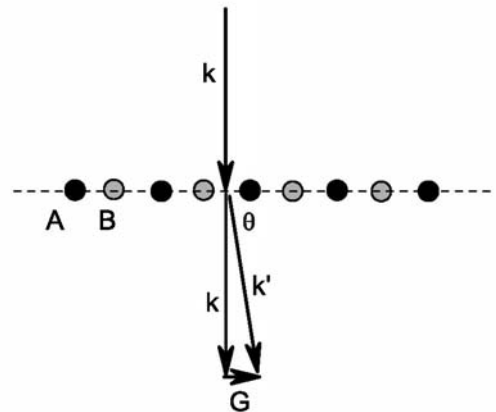
$$\epsilon_F = \hbar c \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{1/3} \sim \hbar c \left(\frac{N}{V} \right)^{1/3} \quad (21)$$

$$(c) u = \frac{1}{N} \int_0^{\epsilon_F} \epsilon D(\epsilon) d\epsilon = \frac{\int_0^{\epsilon_F} \epsilon D(\epsilon) d\epsilon}{\int_0^{\epsilon_F} D(\epsilon) d\epsilon} = \frac{\int_0^{\epsilon_F} \epsilon^3 d\epsilon}{\int_0^{\epsilon_F} \epsilon^2 d\epsilon} = \frac{3}{4} \epsilon_F$$

Dit is (tov ϵ_F) groter dan de gemiddelde energie in het niet-relativistische geval, omdat de toestandsdichtheid nu met ϵ^2 is en niet met $\epsilon^{1/2}$, dus er zijn relatief meer toestanden bij hogere energie.

2. Diffractie aan een 1-dim rooster (3 + 4 = 3 = 10)

Beschouw een rij atomen ABABAB.....AB, met atoomafstand A-B van $a/2$. De vormfactoren voor de twee typen atomen zijn f_A en f_B . De bundel röntgenstraling valt loodrecht op de rij atomen in (zie figuur).



- Bespreek de diffractieconditie, en laat zien dat positieve interferentie optreedt voor $n\lambda = a \cos\theta$, waar θ de hoek is tussen de rij atomen en de verstrooide bundel (zie figuur). λ is de golflengte, en n de orde ($n = 1, 2, 3 \dots$)
- Geef de structuurfactor en laat zien dat de intensiteit van de verstrooide bundel evenredig is met $|f_A - f_B|^2$ als de orde n oneven is, en evenredig met $|f_A + f_B|^2$ als n even is.
- Bespreek zo duidelijk mogelijk de situatie wanneer $f_A = f_B$

- The reciprocal lattice vector for this one dimensional lattice is $\mathbf{b} = \frac{2\pi}{a}\mathbf{x}$, where \mathbf{x} is the unit vector along the lattice. At small diffraction angle, the interference condition, $\mathbf{k}' - \mathbf{k} = \mathbf{G} = n\mathbf{b}$, is just:

$$|\mathbf{k}'| \cos \theta = n \frac{2\pi}{a} \quad (10)$$

as illustrated in the figure. Since the scattering is elastic, such that $|\mathbf{k}'| = |\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$, then above equation is equivalent to $n\lambda = a \cos\theta$.

- The basis of the one dimensional lattice are chosen as the atom A at $x = 0$ and the atom B at $x = a/2$. Then the structure factor is:

$$S = \sum_j f_j \exp[-2\pi i n_j x_j] = f_A + f_B \exp[-2\pi i \frac{n}{2}] = f_A + f_B \exp[-n\pi i] \quad (11)$$

since the diffraction intensity is proportional to $|S|^2$, then when n is odd, the intensity is proportional to $|f_A - f_B|^2$, and to $|f_A + f_B|^2$, when n is even.

- When $f_A = f_B = f$, the diffraction beams for those odd n will disappear since the structure factor for those n will vanish; and the intensity for those even n will be proportional to $4|f|^2$. Physically, this is due to the fact that, when $f_A = f_B$, we can not tell the difference between two types of atoms in x-ray

scattering experiment, thus this lattice is equivalent to a monatomic lattice with spacing $a' = a/2$. If we compute the direction and intensity for the x-ray diffraction pattern in this monatomic lattice, it will be exactly those in diatomic lattice with n even.

3. Energiebanden in een vierkant rooster (3 + 5 = 2 = 10)

Beschouw een vierkant rooster met roosterconstante a in 2-dimensies met de kristalpotentiaal $U(x, y) = -6U \cos(2\pi x/a) \cos(2\pi y/a)$.

- Bereken en teken eerst de laagste drie vrije-electron energiebanden in de eerste Brillouin Zone langs de $[1,1]$ richting tot aan het hoekpunt van de BZ bij $\mathbf{k} = (\pi/a)(1,1)$. U mag $(\hbar^2/2m)(\pi/a)^2$ gebruiken als energie eenheid.
- Gebruik de Bijna-Vrije-Electron benadering om de grootte van de energiekloof ('bandgap') te berekenen in het hoekpunt $(\pi/a, \pi/a)$ van de Brillouin Zone. U mag de benadering van een 2×2 matrix gebruiken.
- Stel dat elk atoom 2 elektronen bijdraagt aan het electronengas. Is dit materiaal dan een geleider of een isolator? Verklaar met argumenten uw antwoord.

a. Zie Kittel; de drie laagste banden zijn met $\mathbf{G} = (0,1)$; dan $\mathbf{G} = (0,-1)$ of $(-1, 0)$; en dan met $\mathbf{G} = (-1,-1)$

(b)

The potential $U(x, y)$ is periodic in both x and y direction with period a , and the fourier transform of the potential with $\mathbf{G} = (2\pi/a, 2\pi/a)$ is:

$$\begin{aligned}
 U_{\mathbf{G}} &= \frac{1}{a^2} \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} dy U(x, y) e^{i(\frac{2\pi}{a}x + \frac{2\pi}{a}y)} \\
 &= \frac{-4U}{a^2} \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} dy \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{a}y\right) e^{i(\frac{2\pi}{a}x + \frac{2\pi}{a}y)} \\
 &= -U
 \end{aligned} \tag{17}$$

this is also the fourier component of $-\mathbf{G}$ (You can check the calculation exactly, indeed, this is so since the potential $U(x, y)$ is real). Then at $\mathbf{k} = (\pi/a, \pi/a) = \mathbf{G}/2$, from the central equation:

$$\begin{aligned}
 (\lambda_{\mathbf{k}} - \epsilon)C\left(\frac{1}{2}\mathbf{G}\right) - UC\left(-\frac{1}{2}\mathbf{G}\right) &= 0 \\
 -UC\left(\frac{1}{2}\mathbf{G}\right) + (\lambda_{\mathbf{k}} - \epsilon)C\left(-\frac{1}{2}\mathbf{G}\right) &= 0
 \end{aligned} \tag{18}$$

where $\lambda_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2 / 2m$. To have nontrivial solutions of $C(\frac{1}{2}\mathbf{G})$ and $C(-\frac{1}{2}\mathbf{G})$, it must be:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_{\mathbf{k}} - \epsilon & -U \\ -U & \lambda_{\mathbf{k}} - \epsilon \end{pmatrix} = 0 \tag{19}$$

which gives the energy:

$$\epsilon_{1,2} = \lambda_{\mathbf{k}} \pm U \tag{20}$$

therefore, the energy gap is:

$$\Delta = \epsilon_1 - \epsilon_2 = 2U \tag{21}$$

- Het hangt van de grootte van U [tov $(\hbar^2/2m)(\pi/a)^2$] af, of de band volledig wordt opgevuld, of dat er elektronen in de 2^{de} Brillouin Zone komen. Op de rand van BZ $(\pi/a, 0)$ is de energie de helft van de energie in het hoekpunt $(\pi/a, \pi/a)$.

4. Transport in het vrije electronen model (3 + 3 + 4 + 4 = 14)

De bewegingsvergelijking van ladingsdragers in een geleider in een electricch en magnetisch veld, kan geschreven worden als $m\left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau}\right)\vec{v} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$.

- a. Bespreek de betekenis en de fysische achtergrond van deze bewegingsvergelijking en van de botsingstijd τ .
- b. Leid uit de bewegingsvergelijking af dat voor het geval dat $\mathbf{B} = 0$, de frequentieafhankelijkheid van de geleidbaarheid σ gegeven wordt door

$$\sigma(\omega) = \sigma(0) \left(\frac{1 + i\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \right), \text{ waarbij } \sigma(0) = ne^2\tau/m.$$

- c. Bespreek de geometrie en de fysische achtergrond van het Hall effect (maak een tekening), en leid af dat in het simpele vrije electronmodel de Hallcoefficient gegeven wordt door $R_H = -\frac{1}{ne}$, waarbij n de dichtheid van ladingsdragers is. Maak gebruik van de boven gegeven bewegingsvergelijking.

- d. Leid af dat de Hall coefficient in een halfgeleider gegeven wordt door $R_H = \frac{1}{e} \frac{p\mu_h^2 - n\mu_e^2}{(p\mu_h + n\mu_e)^2}$, waarbij p en n de dichtheden van positieve en negatieve ladingsdragers voorstelt, en μ de mobiliteit, gedefinieerd door het positieve quotient van driftsnelheid en electricch veld $\mu = |v|/E$. Neem alleen termen mee lineair in de sterkte van het magnetisch veld B , en lineair in $\omega_c\tau$, waarbij $\omega_c = eB/m$ de cyclotronfrequentie is, en τ de botsingstijd.

b.

SOLUTION.

For the equation $m(dv/dt + v/\tau) = -eE$, we are seeking for the solution in the form $v(t) = v_0 e^{-i\omega t}$ when the electric field is $E(t) = E_0 e^{-i\omega t}$. Substitute in the equation, we have:

$$mv_0 \left(-i\omega + \frac{1}{\tau} \right) e^{-i\omega t} = -eE_0 e^{-i\omega t} \quad (17)$$

which gives:

$$v_0 = \frac{-eE_0\tau}{m} \left(\frac{1 + i\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \right) \quad (18)$$

therefore, the current density:

$$j = n(-e)v_0 = \frac{ne^2\tau}{m} \left(\frac{1 + i\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \right) E_0 \quad (19)$$

since $j = \sigma E$, we obtain the dependence of conductivity on ω as:

$$\sigma(\omega) = \sigma(0) \left(\frac{1 + i\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \right) \quad (20)$$

where $\sigma(0) = ne^2\tau/m$.

c. Zie Kittel pagina 153, 154

d.

Opgave 3

a) De kracht op een lading is de Lorentzkracht

$$\vec{F} = (q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B})) \quad \text{waarbij de lading van de ladingdrager is (rij electron } q = -e)$$

Bevestigingsvergelijking

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \hbar \frac{d\vec{k}}{dt}$$

Fermibel raakt verplaatst en uiteindelijk geldt: $\hbar \delta \vec{k} = F \delta t$

instationair

evenwicht

$$\rightarrow \text{ofwel } \delta \vec{k} = \frac{F \delta t}{\hbar}$$

met $\vec{F} = -e\vec{E}$ (afgeleid met $\vec{B} = 0$)

De gemiddelde snelheidsverandering, of driftsnelheid van het totale Fermi / ladingdrager systeem is dus

$$\vec{v}_D = \frac{\hbar \delta \vec{k}}{m} = \frac{-eE\delta t}{m}$$

Dit levert dan als bewegingsvergelijking

$$\hbar \left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right) \delta \vec{k} = \vec{F} = m \left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right) \vec{v} = \vec{F}$$

In componenten geschreven wordt dat $(\vec{F} = -e\vec{E} - e\vec{v} \times \vec{B})$

en $m\vec{v} = \hbar \delta \vec{k}$

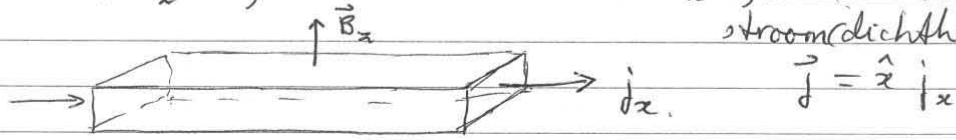
en $\vec{B} = \hat{z} B_z$

$$m \left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right) v_x = -eE_x - e v_y B_z \quad (1)$$

$$m \left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right) v_y = -eE_y + e v_x B_z \quad (2)$$

$$m \left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right) v_z = -eE_z \quad (3)$$

b) Het Hall effect ontstaat wanneer een materiaal (vaak in staaf of film vorm) geplaatst wordt in een elektrisch en magnetisch veld loodrecht op elkaar. Het elektrische veld wordt aangebracht via contacten en veroorzaakt een stroom. Het magnetisch veld staat dus loodrecht op die stroom. Kies weer $\vec{B} = \hat{x} B_z$, en kies $\vec{E} = \hat{x} E_x$, en dus ook de stroom(dichtheid) $\vec{j} = \hat{x} j_x$.



De stroom in de x-richting bestaat uitdraard een driftsnelheid in de x-richting. In de y- en z-richting zijn er geen contacten, dus in evenwicht een driftsnelheid nul.

Vergl ① levert gewoon de wet van Ohm:

$$m \left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right) v_x = -e E_x \quad \begin{matrix} \text{in} \\ \text{evenwicht} \\ \frac{d}{dt} v_x = 0 \end{matrix} \quad m \frac{v_x}{\tau}$$

$$\begin{aligned} \text{ofwel } j_x &= n q v_x = \frac{n(-e)(-e)\tau}{m} E_x \\ &= \frac{n e^2 \tau}{m} E_x \\ &= \sigma E_x \quad \text{④} \end{aligned}$$

met σ de elektrische geleidbaarheid ($\sigma = \frac{1}{\rho}$, met ρ de soortelijke weerstand)

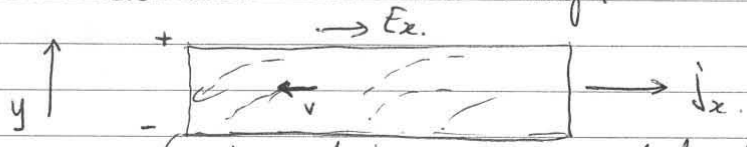
Vergl ② levert het Hall effect:

$$m \left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right) v_y = 0 = -e E_y + e v_x B_z$$

Omdat $v_x \neq 0$ en $B_z \neq 0$, moet er een $E_y \neq 0$ ontstaan:

Er komt een elektrisch veld vanwege afbuigen van de ladingdragers, die in x -richting bewegen in een loodrecht magnetisch veld B_z .

Boven-aanzicht van de staaf:



extra elektronen aan onderkant, dus elektrisch veld E_y naar beneden gericht (altijd van + \rightarrow -)

$$E_y = + v_x B_z = + \frac{j_x}{n(-e)} B_z = - \frac{j_x B_z}{ne}$$

De Hall coeff is gedefinieerd als $R_H = \frac{E_y}{j_x B_z}$, zodat

$$R_H = - \frac{1}{ne}$$

Dit is dus de uitkomst wanneer er alleen negatieve ladingdragers zijn, met dichtheid n en lading $-e$.

c) In een halfgeleider zijn ^{effektief} zowel positieve als negatieve ladingdragers, die onder invloed van een elektrisch veld (zeg $\vec{E} = \hat{x} E_x$) in tegengestelde richting bewegen, en dus ook in tegengestelde richting afbuigen in een magnetisch veld. Afhangelijk van de dichtheden van die twee typen ladingdragers, en hun 'beweeglijkheid' (ofwel respons op electr. veld ofwel effectieve massa), kan men zich voorstellen dat in een halfgeleider de Hall coeff zowel positief als negatief kan zijn. We kunnen dat kwantitatief

maken vanuit de bewegingsvergelijkingen. De geleidbaarheid zal nu een combinatie zijn van de stroom van de positieve en de negatieve ladingdragers. Om die te kunnen onderscheiden definiëren we de mobiliteit (beweeglijkheid) — zie Kittel pag 208) als

$$\mu = \frac{|v|}{E}, \text{ ofwel } \mu_h = \frac{|v_h|}{E_x} \text{ en } \mu_e = \frac{|v_e|}{E_x}$$

en $v = \frac{q\tau}{m} E_x$, zodat $\mu_e = \frac{e\tau_e}{m_e}$ en $\mu_h = \frac{e\tau_h}{m_h}$. (5)

$\mu > 0$ altijd (gedefinieerd).

Dus nu heeft (2) twee bijdragen, voor gaten en voor elektronen (in evenwicht d term is nul)

electronen: $m_e \frac{v_{y,e}}{\tau} = -e E_y + e v_{x,e} B_z$

gaten: $m_h \frac{v_{y,h}}{\tau} = +e E_y - e v_{x,h} B_z$

Herschrijven met behulp van (4) en (5) levert

$$j_{y,e} = \frac{n e^2 \tau}{m_e} E_y + \frac{n e^2 \tau \mu_e}{m_e} E_x B_z = \sigma_e E_y + \sigma_e \mu_e E_x B_z$$

(met $\sigma = \sigma_e + \sigma_p = \frac{n e^2 \tau}{m_e} + \frac{p e^2 \tau}{m_h} = n e \mu_e + p e \mu_h$)

en $j_{y,h} = \frac{p e^2 \tau}{m_h} E_y - \frac{p e^2 \tau \mu_h}{m_h} E_x B_z = \sigma_p E_y - \sigma_p \mu_h E_x B_z$

Uiteraard weer $j_y = j_{y,p} + j_{y,e} = 0$ en $\mu = \frac{e\tau}{m_{e,h}}$

$$0 = (p e \mu_h + n e \mu_e) E_y + (n e \mu_e^2 - p e \mu_h^2) E_x B_z$$

Gebruik $j_x = \sigma E_x = (p e \mu_h + n e \mu_e) E_x$

zodat $R_H = \frac{E_y}{j_x B_z} = \frac{(n e \mu_e^2 - p e \mu_h^2) E_x B_z}{(p e \mu_h + n e \mu_e) E_x B_z} = \frac{1}{e} \frac{p \mu_h^2 - n \mu_e^2}{(p \mu_h + n \mu_e)^2}$

5. Roostertrillingen en thermische eigenschappen.

a. Stel de bewegingsvergelijkingen op voor een lineair rooster van N atomen (massa M) met één atoom per eenheidscel (rooster constante a_0) en uitsluitend naaste buurinteracties (krachtsconstante C), en laat zien dat de dispersierelatie voor de trillingen gegeven wordt door $M\omega^2(k) = 4C\sin^2(\frac{1}{2}ka_0)$, waarbij ω de hoekfrequentie en k het golfgetal is.

b. Laat zien (vanuit de dispersie relatie), dat de toestandsdichtheid gegeven wordt door $D(\omega) = \frac{2N}{\pi} \frac{1}{(\omega_m^2 - \omega^2)^{1/2}}$, waarbij ω_m de maximum frequentie is.

c. Stel nu dat we in de driedimensionale situatie een optische fonon-tak hebben, waarvoor geldt dat in de buurt van $k = 0$ $\omega(k) = \omega_0 - Ak^2$. Laat dan zien dat de toestandsdichtheid daar gegeven wordt door

$$D(\omega) = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \left(\frac{2\pi}{A^{3/2}}\right) (\omega_0 - \omega)^{1/2} \quad \text{voor } \omega < \omega_0 \quad \text{en} \quad D(\omega) = 0 \quad \text{voor } \omega > \omega_0$$

d. Beschouw nu een vaste stof met een zeer sterk anisotrope lagen-structuur. Elk atoom in deze structuur kan beschouwd worden als een eenvoudige harmonische oscillator in drie dimensies. De (veer) krachten in richtingen parallel aan de lagen zijn zeer groot; de eigenfrequenties van de oscillatie in de x - en y - richting (in het vlak van de lagen) zijn gelijk, en hebben de waarde ω_{\parallel} , zodanig groot dat $\hbar\omega_{\parallel} \gg k_B T_k$, waarbij $T_k = 300 \text{ K}$ kamertemperatuur is. Anderzijds is de kracht loodrecht op de lagen zeer klein; daarvoor geldt dat de oscillatiefrequentie ω_{\perp} van een atoom in de z -richting (loodrecht op de lagen dus) zo klein is dat $\hbar\omega_{\perp} \ll k_B T_k$. Bereken en/of beargumenteer zorgvuldig wat (in goede benadering) de soortelijke warmte van een dergelijke vaste stof is bij kamertemperatuur.

Antwoorden:

a. Zie Kittel pagina 91, 92

b. Hierbij de algemene oplossing. Het mocht natuurlijk ook voor alleen 1-dim

A general expression of $D(\omega)$ in d dimension lattice is (a generation of Eqn. (35) in Kittel):

$$D(\omega)d\omega = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^d \int_{\text{shell}} d^d K \quad (6)$$

where the "shell" refers to a region in K space bounded by two surfaces on which the phonon frequency are ω and $\omega + d\omega$.

In 1-D, the "shell" is just composed by two points, and hence $\int_{\text{shell}} d^d K = |2dK|$. Therefore, from above equation:

$$D(\omega) = \left(\frac{L}{\pi}\right) \cdot \left|\frac{dK}{d\omega}\right| \quad (7)$$

From the dispersion relation of a monatomic linear chain, we have:

$$\left|\frac{dK}{d\omega}\right| = \frac{1}{\left|\frac{d\omega}{dK}\right|} = \frac{1}{\left|\frac{a}{2}\omega_m \cos\left(\frac{1}{2}Ka\right)\right|} = \frac{2}{a(\omega_m^2 - \omega^2)^{1/2}} \quad (8)$$

thus, from above equations, note that $N = L/a$, it follows that:

$$D(\omega) = \frac{2N}{\pi} \cdot \frac{1}{(\omega_m^2 - \omega^2)^{1/2}} \quad (9)$$

- c. For the optical branch in 3-D case, $\omega(K) = \omega_0 - AK^2$. Now the "shell" is indeed a spherical shell with thickness of dK and a surface area of $4\pi K^2$, thus $\int_{\text{shell}} d^d K = |4\pi K^2 dK|$. Therefore from (6), we have:

$$D(\omega) = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \cdot 4\pi K^2 \left|\frac{dK}{d\omega}\right| \quad (10)$$

From the dispersion relation:

$$\left|\frac{dK}{d\omega}\right| = \frac{1}{\left|\frac{d\omega}{dK}\right|} = \frac{1}{|-2AK|} = \frac{1}{2A^{1/2}(\omega_0 - \omega)^{1/2}} \quad (11)$$

thus, we obtain the density of states:

$$D(\omega) = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \left(\frac{2\pi}{A^{3/2}}\right) (\omega_0 - \omega)^{1/2} \quad (12)$$

However, this expression is only correct for $\omega < \omega_0$. From the dispersion relation $\omega(K) = \omega_0 - AK^2$, there is no K states such that $\omega > \omega_0$, then $D(\omega) = 0$ when $\omega > \omega_0$. Therefore, there is a discontinuity at $\omega = \omega_0$.

d.

 Since $\hbar\omega_{\parallel} \gg 300k$, at room temperature $T = 300K$, the thermal fluctuation is not high enough to excite the degrees of freedom within the plane, *i.e.* the degrees of freedom associating with $\hbar\omega_{\parallel}$ is frozen. On the other hand, $300k \gg \hbar\omega_{\perp}$, the solid atom can only move along the direction perpendicular to the plane.

Hence, from equipartition theorem, the average kinetic and potential energy per atom are both $\frac{1}{2}kT$, and then the average total energy is kT , which therefore gives a specific heat per atom of $c_V = k$, or equivalently, $c_V = kN_A = R$ is the molar specific heat.

Constants :

electron charge e	$1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$	electron mass m_e	$9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Planck's constant h	$6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$	vacuum permeability μ_0	$4\pi \times 10^{-7} \text{ NA}^{-2}$
Light velocity c	$3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$	Boltzmann constante k_B	$1.38 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$
Avogadro number N	$6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$	vacuum permittiviteit ϵ_0	$10^7/(4\pi c^2)$
Bohr magneton μ_B	$9.27 \times 10^{-24} \text{ JT}^{-1}$	proton massa M_p	$1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Gasconstante $R=Nk_B$	$8.32 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$		

$$2\cos ka = \exp(ika) + \exp(-ika)$$

$$1-\cos ka = 2\sin^2(ka/2)$$

$$\cos x \approx 1 - x^2/2 \text{ voor } x \ll 1$$

$$\sum_{m=0}^{M-1} x^m = \frac{1-x^M}{1-x}$$