Tentamen Klassieke Elektrodynamica

14 juli 2014

Opgave 1.
Twee coaxiale lange holle cilinders hebben de z-as als as. De binnenste cilinder met straal a is positief geladen, de buitenste met straal $b > a$ is negatief geladen. De lading is homogeen verdeeld over de cilinders en bedraagt $\pm\lambda$ per lengte-eenheid. We gebruiken cilindercoördinaten s, ϕ en z. De lengte L van beide cilinders is veel groter dan b, zodat eindeffecten mogen worden verwaarloosd.

a. Bereken het elektrische veld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ in de ruimte tussen de cilinders.

b. Bepaal de (elektrische) veldenergiedichtheid $u_{\text{el}}(\mathbf{r})$ in de ruimte tussen de cilinders als functie van s, en de totale veldenergie U_{el}.

Nu nemen we aan dat beide geladen cilinders bewegen met een snelheid v in de z-richting, zodat de totale stroomsterkte op de cilinders $\pm\lambda v$ bedraagt.

c. Bepaal het magnetische veld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ in de ruimte tussen de cilinders.

d. Bepaal de totale (elektrische plus magnetische) veldenergiedichtheid $u(\mathbf{r}) = u_{\text{el}}(\mathbf{r}) + u_{\text{mag}}(\mathbf{r})$ in de ruimte tussen de cilinders als functie van s. Geef ook een uitdrukking voor $u(\mathbf{r})/u_{\text{el}}(\mathbf{r})$.

e. Bepaal de energiestroomdichtheid $\mathbf{S}$ van het elektromagnetische veld (de Poynting vector). Geef ook een uitdrukking voor $\mathbf{S}/u_{\text{el}}(\mathbf{r})$.

Opgave 2.
We weten dat de potentialen $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\lambda$ en $V' = V - \partial\lambda/\partial t$ dezelfde elektrische en magnetische velden weergeven als de potentialen $\mathbf{A}$ en V, waarbij $\lambda(\mathbf{r}, t)$ een willekeurige functie van plaats en tijd is. Deze ijkvrijheid kan worden gebruikt om potentialen te laten voldoen aan (bijvoorbeeld) de Lorenz-ijkvoorwaarde $c^2\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial V/\partial t = 0$.

a. Stel nu dat $\mathbf{A}$ en V aan de Lorenz-ijk voldoen. Aan welke voorwaarde moet de functie λ dan voldoen om ervoor te zorgen dat $\mathbf{A}'$ en V' eveneens aan de Lorenz-ijk voldoen?

b. Laat zien dat de potentialen zo kunnen worden gekozen dat $V = 0$. Laat ook zien dat voor vrije velden (zonder ladingen en stromen) de bijbehorende vectorpotentiaal divergentievrij is (dus dat $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0$).

Als voorbeeld van vrije velden bekijken we een vlakke golf, beschreven door de (complexe) potentialen $\tilde{V} = 0$, $\tilde{\mathbf{A}} = F\hat{\mathbf{x}} \exp(ikz - i\omega t)$, met $\omega = ck$. Verder kiezen we de functie $\tilde{\lambda} = f \exp(ikz - i\omega t)$, voor een willekeurige constante f.

c. Bereken de potentialen $\tilde{\mathbf{A}}' = \tilde{\mathbf{A}} + \boldsymbol{\nabla}\tilde{\lambda}$ en $\tilde{V}' = -\partial\tilde{\lambda}/\partial t$, en laat zien dat die aan de Lorenz-ijk voldoen, ongeacht de waarde van f.

d. Bereken ook de (complexe) elektrische en magnetische velden $\tilde{\mathbf{E}}$ en $\tilde{\mathbf{B}}$, uitgaande van deze potentialen $\tilde{\mathbf{A}}'$ en $\tilde{V}'$.

Het elektrostatische veld voor een tijdonafhankelijke ladingsverdeling $\rho(\mathbf{r})$ kan worden beschreven door de scalaire Coulombpotentiaal $V(\mathbf{r})$, terwijl $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$.

e. Geef nu een gedaante van de functie λ, zodat $V' = 0$. Geef tevens de bijbehorende vectorpotentiaal $\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t)$.

Opgave 3.

In het vlak $z = 0$ bevindt zich een ideaal geleidende plaat. We weten dat langs het oppervlak de parallelle component van het elektrische veld en de loodrechte component van het magnetische veld verdwijnen ($\mathbf{E}^{\parallel} = 0$ en $B^{\perp} = B_z = 0$ voor $z = 0$). We bekijken de reflectie van een invallende vlakke golf met lineaire polarisatie, invalshoek θ, en golfvector $\mathbf{k}_I = k(\sin\theta, 0, \cos\theta)$. Het invallende magnetische veld in complexe notatie is gegeven door $\tilde{\mathbf{B}}_I(\mathbf{r}, t) = G\hat{\mathbf{y}} \exp(i\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$, met $\omega = ck$. Zowel de invallende als de gereflecteerde golf bevindt zich alleen in het gebied $z < 0$.

a. Bepaal het bijbehorende (complexe) elektrische veld $\tilde{\mathbf{E}}_I(\mathbf{r}, t)$ van de invallende golf.

b. Beargumenteer dat de golfvector van de gereflecteerde golf gelijk is aan $\mathbf{k}_R = k(\sin\theta, 0, -\cos\theta)$. Geef een uitdrukking voor het elektrische veld $\tilde{\mathbf{E}}_R(\mathbf{r}, t)$ van deze golf.

c. Bepaal het bijbehorende (complexe) magnetische veld $\tilde{\mathbf{B}}_R(\mathbf{r}, t)$ van de gereflecteerde golf.

d. Ga na of het totale (fysische) elektrische veld $\mathbf{E}$ knoopvlakken heeft, waar geldt dat $\mathbf{E} = 0$ voor elk tijdstip. Ga eveneens na of het magnetische veld $\mathbf{B}$ knoopvlakken heeft. Geef aan welke die eventuele knoopvlakken zijn.

Omdat de velden verdwijnen in de geleider vertoont E_z een discontinuïteit bij $z = 0$, die gepaard gaat met een oppervlaktelading in het vlak $z = 0$.

e. Bereken de oppervlakteladingsdichtheid $\sigma(x, y, t)$.