Tentamen Klassieke Elektrodynamica

5 april 2013

Opgave 1

Twee grote parallelle condensatorplaten bevinden zich in de vlakken $z = 0$ en $z = b$, en bevatten een uniforme oppervlakteladingsdichtheid σ en $-\sigma$. De platen hebben een groot oppervlak A, zodat randeffecten mogen worden verwaarloosd.

a. Bepaal het elektrische veld $\mathbf{E}$ (in grootte en richting) en de energiedichtheid u_{el} van het veld tussen de platen.

b. Bepaal de totale veldenergie W, en vind daaruit de kracht $F = dW/db$ op een plaat (bij constante waarde van σ).

Nu nemen we aan dat door de platen een uniforme stroom loopt, met oppervlaktestroomdichtheid $\mathbf{K} = K\hat{\mathbf{x}}$ en $-K\hat{\mathbf{x}}$. Daardoor ontstaat een uniform magneetveld tussen de platen.

c. Bepaal het magnetische veld $\mathbf{B}$ (in grootte en richting), en tevens de energiedichtheid u_{mag} van het magnetisch veld tussen de platen.

d. Bepaal ook voor dit geval de kracht op een plaat (bij constante waarde van de stroom).

e. Geef de impulsdichtheid $\mathbf{g}$ van het veld in aanwezigheid van zowel de oppervlaktelading als de oppervlaktestroom.

Opgave 2

Gegeven is dat met een zekere ladingsverdeling $\rho(\mathbf{r}, t)$ een constante (dus tijdonafhankelijke) stroomdichtheid $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ correspondeert. U mag zonder bewijs gebruiken de continuïteitsvergelijking $\partial\rho/\partial t + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, de golfvergelijkingen $\nabla^2 V - (\partial^2 V/\partial t^2)/c^2 = -\rho/\epsilon_0$ en $\nabla^2 \mathbf{A} - (\partial^2 \mathbf{A}/\partial t^2)/c^2 = -\mu_0 \mathbf{J}$ voor de scalaire potentiaal V en de vectorpotentiaal $\mathbf{A}$ in de Lorentz-ijk, en tevens de (geretardeerde) oplossing van de golfvergelijking in de vorm $V(\mathbf{r}, t) = (1/4\pi\epsilon_0) \int d\tau' \rho(\mathbf{r}', t_r)/R$ (waarin $t_r = t - R/c$, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$).

a. Toon aan dat de ladingsdichtheid $\rho(\mathbf{r}, t)$ lineair met de tijd varieert, zodat we kunnen schrijven $\rho_0(\mathbf{r}) + t\eta(\mathbf{r})$, en geef een uitdrukking voor $\eta(\mathbf{r})$.

b. Geef een uitdrukking voor de scalaire potentiaal V in de Lorentz-ijk in termen van ρ_0 en $\mathbf{J}$.

c. Geef een uitdrukking voor de vectorpotentiaal $\mathbf{A}$ in de Lorentz-ijk.

d. Geef een uitdrukking voor het magnetische veld $\mathbf{B}$.

e. Geef een uitdrukking voor het elektrische veld $\mathbf{E}$, en laat zien dat die hetzelfde is als de Coulomb-uitdrukking voor het elektrische veld zonder retardatie.

Opgave 3.
Een vlakke monochromatische golf in vacuüm met frequentie $\omega = ck$ schrijven we in complexe notatie als $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = E_0 \hat{\mathbf{n}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$, waar E_0 een reële amplitude is, en $\hat{\mathbf{n}}$ een vector met lengte 1. Deze vector $\hat{\mathbf{n}}$ is de richting van lineaire polarisatie. Het fysische elektrische veld is $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$.

a. Laat zien dat uit de Maxwellvergelijkingen volgt dat $\hat{\mathbf{n}}$ en $\mathbf{k}$ loodrecht op elkaar staan (dus dat $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{k} = 0$). Geef een expliciete uitdrukking voor het fysische elektrische veld $\mathbf{E}$.

b. Geef een uitdrukking voor het (fysische) magnetische veld $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$.

Nu nemen we een superpositie van twee vlakke golven met dezelfde frequentie ω, dezelfde amplitude E_0, en dezelfde richting $\hat{\mathbf{n}}$ van lineaire polarisatie, maar met verschillende golfvectoren $\mathbf{k}_1$ en $\mathbf{k}_2$ (met dezelfde grootte, zodat $k_1 = k_2 = k$). Dus $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = E_0 \hat{\mathbf{n}}[\exp(i\mathbf{k_1} \cdot \mathbf{r}) + \exp(i\mathbf{k_2} \cdot \mathbf{r})] \exp(-i\omega t)$. De polarisatie staat dus loodrecht op het vlak door beide golfvectoren. We willen nagaan of het elektrische veld knoopvlakken heeft, waar het veld altijd nul is. We schrijven daartoe eerst $\mathbf{k}_1 = \mathbf{K} + \mathbf{q}$, $\mathbf{k}_2 = \mathbf{K} - \mathbf{q}$, waarbij $\mathbf{K}$ het gemiddelde, en $2\mathbf{q}$ het verschil is van $\mathbf{k}_1$ en $\mathbf{k}_2$.

c. Laat zien dat de vectoren $\hat{\mathbf{n}}$, $\mathbf{K}$ en $\mathbf{q}$ loodrecht op elkaar staan. We kunnen de assen dus zo kiezen dat $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{y}}$, $\mathbf{K} = K\hat{\mathbf{z}}$ en $\mathbf{q} = q\hat{\mathbf{x}}$.

d. Toon aan dat het elektrische veld knoopvlakken heeft, en geef aan hoever die knoopvlakken van elkaar liggen. [Aanwijzing: Schrijf het complexe veld $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$ in termen van $\mathbf{K}$ en $\mathbf{q}$, en laat zien dat het fysische veld $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$ een factor $\cos(qx)$ bevat.]

e. Geef nu een uitdrukking voor het magnetische veld $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ behorend bij deze superpositie van twee vlakke golven. Heeft het magnetische veld ook knoopvlakken?