Uitwerking Tentamen

Klassieke Elektrodynamica

5 april 2013

Opgave 1

a. De plaat in $z = 0$ heeft oppervlakteladingsdichtheid σ, de plaat op $z = b$ heeft oppervlakteladingsdichtheid $-\sigma$. Op grond van symmetrie staat het elektrische veld in de z-richting. De grootte van het veld volgt uit de stelling van Gauss ($\int_V d\tau \nabla \cdot \mathbf{E} = \oint_S d\mathbf{a} \cdot \mathbf{E}$), voor een rechthoekige doos met bodem en deksel (met oppervlak D) parallel aan de platen, en de zijwanden parallel aan de z-as. De doos bevat lading 0 als die beide platen omvat, σD als die alleen de onderste plaat omvat, en $-\sigma D$ als die alleen de bovenste plaat omvat. Het elektrische veld is $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{z}}\sigma/\epsilon_0$ voor $0 < z < 0$, en $\mathbf{E} = 0$ elders.

b. De veldenergiedichtheid is $u = u_{\text{el}} = \epsilon_0 \mathbf{E}^2/2$, zodat

$$W = \frac{\sigma^2 b A}{2\epsilon_0} .$$

Bij verplaatsing van de bovenste plaat over db neemt het volume (en dus de veldenergie) toe met $dW = (dW/db)db = F db$. Dat geeft de (aantrekkende) kracht $F = dW/db = \sigma^2 A/(2\epsilon_0)$.

c. Bij een uniforme stroom met oppervlaktestroomdichtheid $\mathbf{K} = K\hat{\mathbf{x}}$ en $-K\hat{\mathbf{x}}$ vinden we het magneetveld tussen de platen uit de stelling van Stokes ($\int_S d\mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \oint_C d\mathbf{l} \cdot \mathbf{B}$), toegepast op een rechthoekig lijncontour met twee zijden parallel aan de platen (met lengte L), en twee zijden in de z-richting. Een contour evenwijdig aan de x-as omvat steeds stroom nul, door een contour evenwijdig aan de y-as loopt een stroom KL als die alleen de onderste plaat doorsnijdt, $-KL$ als die alleen de bovenste plaat doorsnijdt. Daaruit volgt dat $B_x = 0$, $-B_y = \mu_0 K$, ofwel $\mathbf{B} = -\mu_0 K\hat{\mathbf{y}}$. De veldenergiedichtheid is dan $u_{\text{mag}} = B^2/(2\mu_0) = \mu_0 K^2/2$. De totale veldenergie is daarmee $W = \mu_0 K^2 bA/2$.

d. De kracht tussen de platen is daarmee $F = dW/db = \mu_0 K^2 A/2$.

e. De veldimpulsdichtheid in aanwezigheid van zowel de oppervlaktelading als de oppervlaktestroom is $\mathbf{g} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mu_0 K \sigma \hat{\mathbf{x}}$.

Opgave 2

a. Uit de continuïteitsvergelijking $\partial\rho/\partial t + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ volgt dat in het gegeven geval $\partial\rho/\partial t$ onafhankelijk is van de tijd, zodat $\rho(\mathbf{r}, t)$ lineair met de tijd varieert. We kunnen dus schrijven $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0(\mathbf{r}) + t\eta(\mathbf{r})$. Invullen in de continuïteitsvergelijking geeft dan dat $\eta(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{J}$.

b. Invullen van deze gedaante voor $\rho(\mathbf{r}, t)$ in de algemene uitdrukking voor de scalaire potentiaal (in de Lorentz-ijk)geeft dan

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\tau' \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{R} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\tau' \frac{\rho_0(\mathbf{r}') - t\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \int d\tau' \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \end{aligned}$$

De eerste integraal bevat in de teller $\rho_0(\mathbf{r}') - t\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r}', t)$. De integraal $\int d\tau' \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')$ in de laatste term is onafhankelijk van $\mathbf{r}$ (en is zelfs nul als de stroomdichtheid voldoende snel naar nul gaat in het verre veld).

c. Omdat de stroomdichtheid niet met de tijd varieert wordt de algemene uitdrukking voor de vectorpotentiaal in de Lorentz-ijk vereenvoudigd tot de stationaire vorm

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} .$$

d. Ook het magneetveld krijgt dan de stationaire uitdrukking

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2}$$

e. Het elektrische veld voldoet aan $\mathbf{E} = -\nabla V - \partial\mathbf{A}/\partial t$, waarin nu de laatste term nul geeft. De laatste term in de uitdrukking voor V (zie b.) draagt niet bij, omdat die niet van $\mathbf{r}$ afhangt. We vinden dus

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\tau' \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\tau' \frac{\rho(\mathbf{r}', t)\hat{\mathbf{R}}}{R^2} .$$

Dit is precies de Coulomb-uitdrukking voor het elektrische veld zonder retardatie.

Opgave 3.

a. Voor het vrije veld (zonder bronnen) geldt dat $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Dan moet ook gelden dat $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 0$, ofwel $\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$. Het fysische elektrische veld is dan $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \hat{\mathbf{n}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$.

b. De wet van Faraday geeft $\partial \mathbf{B}/\partial t = -\nabla \times \mathbf{E}$, ofwel $i\omega \tilde{\mathbf{B}} = i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}$. Voor het fysische magnetische veld geeft dat
$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = (E_0/\omega)\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{n}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$.

c. Uit $\mathbf{k}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{k}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ volgt direct dat ook $\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$. Omdat $k_1^2 = k_2^2 = \omega^2/c^2$ geldt ook dat $\mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = (k_1^2 - k_2^2)/4 = 0$.

d. In termen van $\mathbf{K}$ en $\mathbf{q}$ vinden we nu dat $\mathbf{k}_{1,2} \cdot \mathbf{r} = Kz \pm qx$. Voor het fysische elektrische veld vinden we

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}[\tilde{\mathbf{E}}_1(\mathbf{r}, t) + \tilde{\mathbf{E}}_2(\mathbf{r}, t)] = 2E_0 \hat{\mathbf{n}} \cos(qx) \cos(Kz - \omega t) \ .$$

Het elektrische veld heeft de knoopvlakken (waar $\mathbf{E} = 0$ op elk tijdstip) $\cos(qx) = 0$, dus waar $qx = \pi/2 + m\pi$ (met m geheel). De afstand tussen twee naburige knoopvlakken is dus π/q. Dit kan groot zijn als de hoek tussen $\mathbf{k_1}$ en $\mathbf{k_2}$ klein is. [Dit is het interferentiepatroon van twee vlakke golven met dezelfde frequentie.]

e. Voor het complexe magnetische veld vinden we vervolgens

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{E_0}{\omega}[(\mathbf{K} + \mathbf{q}) \times \hat{\mathbf{n}} e^{i(Kz+qx)-i\omega t} + (\mathbf{K} - \mathbf{q}) \times \hat{\mathbf{n}} e^{i(Kz-qx)-i\omega t}] \\ &= \frac{2E_0}{\omega}[\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}} \cos(qx) e^{iKz-i\omega t} + i\mathbf{q} \times \hat{\mathbf{n}} \sin(qx) e^{iKz-i\omega t}] \ . \end{aligned}$$

Voor het fysische magnetische veld geeft dat

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{2E_0}{\omega}[K\hat{\mathbf{x}} \cos(qx) \cos(Kz - \omega t) + q\hat{\mathbf{y}} \sin(qx) \sin(Kz - \omega t)].$$

Er zijn geen vlakken waar het magnetische veld op elk tijdstip nul is, aangezien $\cos(qx)$ en $\sin(qx)$ niet allebei nul kunnen zijn. Het magnetische veld heeft dus geen knoopvlakken (als beide vlakke golven dezelfde polarisatierichting van het elektrische veld hebben).