

# Tentamen Klassieke Elektrodynamica

24 mei 2013

## Opgave 1

In een lange cilindrische massieve metalen draad met straal  $a$  heerst een uniform elektrisch veld  $E$  parallel aan de as. Het metaal heeft een geleidingsvermogen  $\sigma$ , zodat het veld een uniforme stroomdichtheid  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$  geeft. De arbeid die het veld verricht op de ladingen in de draad bedraagt  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$  per volume-eenheid en per tijdseenheid. Het is praktisch om cilindrische coördinaten  $z$ ,  $s$  en  $\phi$  te gebruiken, met de  $z$ -as als cilinderas.

- Bepaal het magnetische veld in de draad.
- Bepaal de veldenergiedichtheid aan het oppervlak van de draad.
- Bepaal de energie-stroomdichtheid (de Poyntingvector) van het veld langs het oppervlak van de draad.
- Bepaal de instromende elektromagnetische energie ( $dw/dt$ ) per tijdseenheid door het oppervlak van de draad met lengte  $L$ .
- Vergelijk deze uitkomst met de totale verrichte arbeid ( $P$ ) per tijdseenheid op de ladingen in de draad met lengte  $L$ .

## Opgave 2

Gegeven is dat een zekere ladingsverdeling  $\rho(\mathbf{r}, t)$  en de bijbehorende stroomdichtheid  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  beide oscilleren met een vaste frequentie  $\omega$ , zodat we kunnen schrijven  $\rho(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\tilde{\rho}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$ ,  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$ , met complexe  $\tilde{\rho}(\mathbf{r})$  en  $\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r})$ . U mag vrij gebruiken de Lorentz-ijkvoorwaarde  $\mu_0 \epsilon_0 \partial V / \partial t + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , de golfvergelijkingen  $\nabla^2 V - (\partial^2 V / \partial t^2) / c^2 = -\rho / \epsilon_0$  en  $\nabla^2 \mathbf{A} - (\partial^2 \mathbf{A} / \partial t^2) / c^2 = -\mu_0 \mathbf{J}$  voor de scalaire potentiaal  $V$  en de vectorpotentiaal  $\mathbf{A}$  in de Lorentz-ijk, en tevens de (geretardeerde) oplossing van de golfvergelijking in de vorm  $V(\mathbf{r}, t) = (1/4\pi\epsilon_0) \int d\tau' \rho(\mathbf{r}', t_r) / R$  (waarin  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ ,  $t_r = t - R/c$ ).

- Toon aan dat de potentialen kunnen worden geschreven als  $V(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\tilde{V}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$ ,  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$ , en geef expliciete uitdrukkingen voor de complexe potentialen  $\tilde{V}(\mathbf{r})$  en  $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r})$  in termen van  $\tilde{\rho}(\mathbf{r})$  en  $\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r})$ .

- b. Geef de differentiaalvergelijkingen waaraan  $\tilde{V}(\mathbf{r})$  en  $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r})$  voldoen.
- c. Geef de Lorentz-ijkvoorwaarde waaraan  $\tilde{V}(\mathbf{r})$  en  $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r})$  moeten voldoen.
- d. Toon expliciet aan dat de gevonden uitdrukkingen voor  $\tilde{V}(\mathbf{r})$  en  $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r})$  inderdaad voldoen aan de Lorentz-ijkvoorwaarde.
- e. Leid uit de oplossing voor de vergelijking voor  $\tilde{V}$  af dat de vergelijking  $\nabla^2 f + k^2 f = -\delta^3(\mathbf{r})$  als oplossing heeft  $f(\mathbf{r}) = \exp(ikr)/(4\pi r)$ .

**Opgave 3.**

Een vlakke golf in vacuüm met frequentie  $\omega = ck$  heeft als magnetisch veld  $\mathbf{B}(z, t) = \text{Re}\tilde{\mathbf{B}}_0 \exp(ikz - i\omega t)$ , met  $\tilde{\mathbf{B}}_0$  een complexe vector.

- a. Aan welke voorwaarde moet de vector  $\tilde{\mathbf{B}}_0$  voldoen?
- b. Geef een uitdrukking voor het bijbehorende elektrische veld  $\mathbf{E}(z, t)$ .

Nu is gegeven dat de complexe magnetische veldvector geschreven kan worden als  $\tilde{\mathbf{B}}_0 = b_1\hat{\mathbf{x}} + ib_2\hat{\mathbf{y}}$ , met  $b_1$  en  $b_2$  reëel.

- c. Geef het (fysische) magneetveld  $\mathbf{B}(0, t)$  en het (fysische) elektrische veld  $\mathbf{E}(0, t)$  in het vlak  $z = 0$  als functie van de tijd. Welke vorm beschrijven deze vectoren gedurende een oscillatietijd?

Nu wordt in het vlak  $z = 0$  een ideaal geleidende spiegel geplaatst, waartegen de inkomende vlakke golf terugkaatst. [N.B.: De inkomende golf loopt in de positieve  $z$ -richting, en de teruggekaatste golf in de negatieve  $z$ -richting. De golf dringt dus niet door in de halfruimte waar  $z > 0$ .]

- d. Geef een uitdrukking voor het totale elektrische veld voor  $z < 0$ .
- e. Geef een uitdrukking voor het totale magnetische veld voor  $z < 0$ .