Uitwerking Tentamen
Klassieke Elektrodynamica

24 mei 2013

Opgave 1

a. De stroomdichtheid $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} = \sigma E\hat{\mathbf{z}}$ is uniform in de draad. De Maxwellvergelijking (in de stationaire situatie) $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J}$ geeft een magneetveld in de richting van $\hat{\phi}$, waarbij de sterkte volgt uit de kringintegraal langs een cirkel om de as van de cilinder: $\oint d\mathbf{l} \cdot \mathbf{B} = 2\pi sB = \mu_0\pi s^2 J = \mu_0\pi s^2\sigma E$, zodat $\mathbf{B} = \mu_0 s\sigma E\hat{\phi}/2$.

b. Het magnetische veld is $\mathbf{B} = \mu_0 a\sigma E\hat{\phi}$ aan het oppervlak van de draad. Het elektrische veld $\mathbf{E}$ is parallel aan het oppervlak, en daar continu (omdat $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ als $\mathbf{B}$ constant is). De veldenergiedichtheid is dan $u = \epsilon_0 E^2/2 + B^2/(2\mu_0) = \epsilon_0 E^2/2 + \mu_0 a^2\sigma^2 E^2/8$.

c. De Poyntingvector aan het oppervlak is $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_0 = -a\sigma E^2\hat{\mathbf{s}}/2$, dus gericht naar binnen.

d. Het instromende vermogen in een lengte L van de draad is dus $2\pi aLS = \pi a^2 L\sigma E^2$.

e. Het verrichte arbeidsvermogen over een lengte L van de draad is $\int d\tau \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \int d\tau\sigma E^2 = \pi a^2 L\sigma E^2$: gelijk aan het instromende veldvermogen.

Opgave 2

a. De scalaire potentiaal in de Lorentz-ijk is

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\tau' \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{R} = \mathrm{Re}[\tilde{V}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}] \ ,$$

waar

$$\tilde{V}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\tau' \frac{\tilde{\rho}(\mathbf{r}') \exp(i\omega R/c)}{R} \ .$$

De vectorpotentiaal in de Lorentz-ijk is

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{R} = \mathrm{Re}[\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}] \ ,$$

waar

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d\tau' \frac{\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}')\exp(i\omega R/c)}{R} \ .$$

b. De golfvergelijkingen voor V en $\mathbf{A}$ luiden voor ons geval $\nabla^2\tilde{V}+\omega^2\tilde{V}/c^2 = -\tilde{\rho}/\epsilon_0$, $\nabla^2\tilde{\mathbf{A}} + \omega^2\tilde{\mathbf{A}}/c^2 = -\mu_0\tilde{\mathbf{J}}$.

c. De Lorentz-ijkvoorwaarde $\mu_0\epsilon_0\partial V/\partial t + \nabla\cdot\mathbf{A} = 0$ geeft voor dit geval $-i\omega\mu_0\epsilon_0\tilde{V} + \nabla\cdot\tilde{\mathbf{A}} = 0$.

d. Om de Lorentz-ijkvoorwaarde te controleren moet $\nabla\cdot\tilde{\mathbf{A}}$ worden berekend. De uitdrukking in a. laat zien dat $\tilde{\mathbf{A}}$ van $\mathbf{r}$ afhangt via de term $\exp(i\omega R/c)/R$, waarin $R = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$. Vervolgens gebruiken we $\nabla\exp(i\omega R/c)/R = -\nabla'\exp(i\omega R/c)/R$, en na partiële integratie vinden we dan

$$\nabla\cdot\tilde{\mathbf{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d\tau' \frac{\exp(i\omega R/c)\nabla'\cdot\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}')}{R} \ .$$

Invullen van de continuïteitsvergelijking $\nabla'\cdot\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') = i\omega\tilde{\rho}(\mathbf{r}')$ en gebruik van de uitdrukking uit a. voor $\tilde{V}$ laat dan zien dat de ijkvoorwaarde $-i\omega\mu_0\epsilon_0\tilde{V} + \nabla\cdot\tilde{\mathbf{A}} = 0$ geldt.

e. De oplossing van de golfvergelijking voor $\tilde{V}$ (zie b.) heeft de oplossing die in a. is gevonden. Als we $\tilde{\rho}(\mathbf{r})/\epsilon_0$ vervangen door $\delta^3(\mathbf{r})$, en $\tilde{V}$ door f (en ω/c door k), dan wordt de golfvergelijking $\nabla^2 f + k^2 f = -\delta^3(\mathbf{r})$. De oplossing uit a. heeft dan de vorm $f(\mathbf{r}) = \exp(ikr)/(4\pi r)$.

Opgave 3.

a. Het magnetische veld moet voldoen aan de Maxwellvergelijking $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$. Dat geeft bij de gegeven gedaante de voorwaarde $ik\hat{\mathbf{z}}\cdot\tilde{\mathbf{B}}_0 = 0$. De vector $\tilde{\mathbf{B}}_0$ heeft dus z-component nul.

b. Het elektrische veld $\mathbf{E}(z,t)$ moet eenzelfde vlakke-golfgedaante $\mathrm{Re}\tilde{\mathbf{E}}_0\exp(ikz - i\omega t)$ hebben, waarbij (bij afwezigheid van ladingen) $\nabla\cdot\mathbf{E} = 0$, zodat de vector $\tilde{\mathbf{E}}_0$ eveneens z-component nul heeft. Uit de Maxwellvergelijking $c^2\nabla\times\mathbf{B} = \partial\mathbf{E}/\partial t$ (bij afwezigheid van stromen) volgt dan $c^2k\hat{\mathbf{z}}\times\tilde{\mathbf{B}}_0 = -\omega\tilde{\mathbf{E}}_0$, ofwel $\tilde{\mathbf{E}}_0 = -c\hat{\mathbf{z}}\times\tilde{\mathbf{B}}_0$.

c. In het vlak $z = 0$ geldt $\mathbf{B}(0,t) = \mathrm{Re}[(b_1\hat{\mathbf{x}} + ib_2\hat{\mathbf{y}})\exp(-i\omega t)]$, ofwel $\mathbf{B}(0,t) = b_1\hat{\mathbf{x}}\cos(\omega t) + b_2\hat{\mathbf{y}}\sin(\omega t)$. Voor de baan van de vector $\mathbf{B}$ geldt dan $(B_x/b_1)^2 + (B_y/b_2)^2 = 1$. Dat is een ellips met halve assen b_1 en b_2 langs de x- en de y-as. Verder geldt dan $\tilde{\mathbf{E}}_0 = c[ib_2\hat{\mathbf{x}} - b_1\hat{\mathbf{y}}]$, zodat $\mathbf{E}(0,t) = cb_2\hat{\mathbf{x}}\sin(\omega t) - cb_1\hat{\mathbf{y}}\cos(\omega t)$. Dit geeft een ellips met halve assen cb_2 en cb_1 langs de x- en de y-as.

d. De gereflecteerde golf voor het elektrische en het magnetische veld in complexe notatie is evenredig met $\exp(-ikz - i\omega t)$. Langs een ideaal geleidende spiegel moet de parallelle component van het elektrische veld nul zijn. Dat betekent dat de elektrische component van de gereflecteerde golf een tegengesteld teken moet hebben, zodat $\mathbf{E} = c\mathrm{Re}\,\{(ib_2\hat{\mathbf{x}} - b_1\hat{\mathbf{y}})[\exp(ikx - i\omega t) - \exp(-ikx - i\omega t)]\}$, ofwel
$\mathbf{E} = -2c\sin(kz)\,\{b_1\hat{\mathbf{y}}\sin(\omega t) + b_2\hat{\mathbf{x}}\cos(\omega t)\}$

e. Het bijbehorende magnetische veld is dan
$\mathbf{B} = \mathrm{Re}\,\{(b_1\hat{\mathbf{x}} + ib_2\hat{\mathbf{y}})[\exp(ikx - i\omega t) + \exp(-ikx - i\omega t)]\}$. Dit volgt bijvoorbeeld uit de wet van Faraday $\partial\mathbf{B}/\partial t = -\nabla \times \mathbf{E}$. (De amplitude van de magnetische component van de gereflecteerde golf krijgt *geen* minteken. Dat is begrijpelijk, omdat de gereflecteerde golf een tegengestelde golfvector heeft.) We vinden dus
$\mathbf{B} = 2\cos(kz)\,\{b_1\hat{\mathbf{x}}\cos(\omega t) + b_2\hat{\mathbf{y}}\sin(\omega t)\}$