Uitwerking Tentamen

Klassieke Elektrodynamica

23 april 2014

Opgave 1.

a. De plaat in $z = 0$ heeft oppervlakteladingsdichtheid $-\sigma$, de plaat op $z = b$ heeft oppervlakteladingsdichtheid σ. Op grond van symmetrie staat het elektrische veld in de z-richting. De grootte van het veld volgt uit de stelling van Gauss ($\int_V d\tau \nabla \cdot \mathbf{E} = \oint_S d\mathbf{a} \cdot \mathbf{E}$), voor een platte doos met bodem en deksel (met oppervlak D) parallel aan de platen, en de zijwanden parallel aan de z-as. Het elektrische veld is $\mathbf{E} = -\hat{\mathbf{z}}\sigma/\epsilon_0$ tussen de platen, en $\mathbf{E} = 0$ elders.

b. De veldenergiedichtheid is $u = u_{\text{el}} = \epsilon_0 \mathbf{E}^2/2 = \sigma^2/(2\epsilon_0)$, en de totale veldenergie $U_{\text{el}} = \sigma^2 bA/(2\epsilon_0)$.

c. De stelling van Stokes ($\int_S d\mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \oint_C d\mathbf{l} \cdot \mathbf{B}$), toegepast op een rechthoekig lijncontour met twee zijden parallel aan de platen (met lengte L), en twee zijden in de z-richting geeft $\mathbf{B} = \mu_0 \sigma v \hat{\mathbf{y}}$ tussen de platen, en $\mathbf{B} = 0$ elders.

d. De veldenergiedichtheid is dan $u_{\text{mag}} = B^2/(2\mu_0) = \mu_0 v^2 \sigma^2/2$. De totale veldenergie is daarmee $U_{\text{mag}} = \mu_0 v^2 \sigma^2 bA/2$ (als een kinetische energie van een massa $\mu_0 \sigma^2 Ab$; zie ook e.).

e. De veldimpulsdichtheid is dan $\mathbf{g} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mu_0 \sigma^2 v \hat{\mathbf{x}}$, en de totale veldimpuls bedraagt $\mathbf{p} = \mu_0 \sigma^2 Abv \hat{\mathbf{x}}$.

Opgave 2.

a. Uit de continuïteitsvergelijking $\partial\rho/\partial t + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ volgt bij $\partial\rho/\partial t = 0$ dat $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, ofwel $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{J}} = 0$.

b. Uit de algemene uitdrukking voor de geretardeerde scalaire potentiaal volgt bij een tijdonafhankelijke ladingsdichtheid $\rho(\mathbf{r})$ dat $V(\mathbf{r}, t) = (1/4\pi\epsilon_0) \int d\tau' \rho(\mathbf{r}')/R$. De overeenkomstige uitdrukking voor de vectorpotentiaal geeft bij $t_r = t - R/c$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{R} = \text{Re}\frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau' \frac{\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}')}{R} e^{i\omega R/c} e^{-i\omega t} ,$$

zodat $\tilde{\mathbf{A}} = (\mu_0/4\pi) \int d\tau' \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') \exp(i\omega R/c)/R$.

c. Aangezien $\partial V/\partial t = 0$ luidt de ijkvoorwaarde $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{A}} = 0$. De afgeleide ∇ werkt alleen op de term $\exp(i\omega R/c)/R$, terwijl $\nabla[\exp(i\omega R/c)/R] = -\nabla'[\exp(i\omega R/c)/R]$. Met partiële integratie vinden we dan $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{A}} = (\mu_0/4\pi) \int d\tau' [\exp(i\omega R/c)/R] \nabla' \cdot \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') = 0$.

d. Voor het elektrische veld vinden we bij de gevonden potentialen

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\tau' \hat{\mathbf{R}} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} + \mathrm{Re}\left(i\omega \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}\right) ,$$

met $\tilde{\mathbf{A}}$ als gevonden in c.

e. Voor het magnetische veld vinden we

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \mathrm{Re} \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau' \left(-\frac{1}{R^2} + \frac{i\omega}{cR}\right) \hat{\mathbf{R}} \times \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') e^{i\omega R/c} e^{-i\omega t} .$$

Opgave 3.

a. Omdat de richting van het elektrische veld parallel aan het grensvlak ligt volgt uit de continuïteit van $\mathbf{E}^{\|}$ dat $E_{0_I} + E_{0_R} = E_{0_T}$.

b. Voor elk van de drie vlakke golven geldt volgens de wet van Faraday dat $-i\omega \mathbf{B}_0 + i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = 0$. Daaruit volgt dat $\mathbf{B}_I = \hat{\mathbf{y}}(E_{0_I}/v_1) \exp(ik_1 z - i\omega t)$, $\mathbf{B}_R = -\hat{\mathbf{y}}(E_{0_R}/v_1) \exp(-ik_1 z - i\omega t)$, $\mathbf{B}_T = \hat{\mathbf{y}}(E_{0_T}/v_2) \exp(ik_2 z - i\omega t)$.

c. Uit de continuïteit van $\mathbf{H}^{\|}$ volgt dat $(B_{0_I} - B_{0_R})/\mu_1 = B_{0_T}/\mu_2$, ofwel $E_{0_I} - E_{0_R} = \beta E_{0_T}$.

d. Oplossen van de beide vergelijkingen voor E_{0_R} en E_{0_T} in termen van E_{0_I} geeft dan $E_{0_R} = E_{0_I}(1-\beta)/(1+\beta)$, $E_{0_T} = 2E_{0_I}/(1+\beta)$.

e. De energiestroomdichtheid van elke vlakke golf is $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \hat{\mathbf{k}} E_0^2/(\mu v)$. De groottes van de drie stroomdichtheden zijn dan
$S_I = E_{0_I}^2/(\mu_1 v_1)$,
$S_R = [(1-\beta)^2/(1+\beta)^2] E_{0_I}^2/(\mu_1 v_1)$,
$S_T = 4E_{0_I}^2/[\mu_2 v_2 (1+\beta)^2)] = 4\beta E_{0_I}^2/[\mu_1 v_1 (1+\beta)^2]$.
Het invallende vermogen S_I is dus gelijk aan het uitgaande vermogen $S_R + S_T$.