Tentamen Klassieke Mechanica a , 1 juli 2016 , 14u00 – 17u00

Let op – lees onderstaande goed door!

Het tentamen bestaat uit **5** opgaven, onder de laatste staat 'Einde'. Het totaal aantal te behalen punten is **44**, het aantal voor de individuele onderdelen is aangegeven. Er mag geen elektronische apparatuur gebruikt worden. Noteer het antwoord op meerkeuze vragen op je uitwerkingsblad, en *niet* op het opgaveblad.

- Maak iedere opgave op een **apart blad**, omdat opgaven ieder apart worden nagekeken.
- Schrijf op ieder blad je **naam** en **studentnummer**.
- Alle **telefoons** moeten **uit** staan, in je **tas/jas** zitten, en mogen tijdens het tentamen niet tevoorschijn worden gehaald.
- Schrijf duidelijk en werk overzichtelijk. Kladpapier wordt niet nagekeken.
- Bij constatering van **fraude** wordt de student van verdere deelname aan het tentamen uitgesloten. Dit zal tevens aan de examencommissie worden doorgegeven.

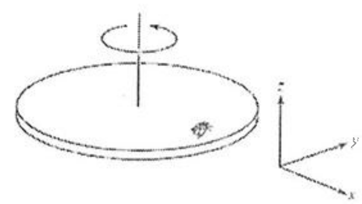
VEEL SUCCES!

Opgave 1. (divers. 5 x 2 = 10) Noteer telkens het beste antwoord, **en** geef een korte motivatie

(1) Je laat een steen van 2 kg van een hoogte van 20 m op de grond vallen. Wat kun je zeggen van de kracht die de steen uitoefent op de grond bij het raken Is die
(a) 10 N ; (b) 20 N ; (c) 40 N ; (d) 200 N ; (e) onbepaald

(2) Een blokje klei wordt tegen een (wrijvingsloos opgesteld) blok lood gegooid dat op dat moment in rust is De klei blijft daaraan vast zitten. Vergeleken met het loodblok heeft het kleiblok na de botsing
(a) meer impuls maar minder kinetische energie; (b) meer impuls en meer kinetische energie; (c) minder impuls en minder kinetische energie; (d) minder impuls maar meer kinetische energie; (e) geen van allen.

(3) Beschouw een steen op een draaiende schijf met assen zoals hiernaast getekend. De schijf ondergaat nu een continue vertraging. Geef de richting van de *tangentiele* versnelling van de steen. Die is :
(a) langs +x ; (b) langs –x ; (c) langs +y ; (d) langs –y ; (e) gelijk aan nul.



(4) Een ring met straal R en massa m draait om een as door het midden van de ring en loodrecht op het vlak van de ring. De ring draait met hoeksnelheid ω_1 en heeft daardoor energie E_1. Nu wordt een kogeltje met massa m/2 aan de ring bevestigd. Als de ring weer met ω_1 draait is de energie E_2. Er geldt :
(a) $E_2 = \frac{1}{2} E_1$; (b) $E_2 = \sqrt{(3/2)}\, E_1$; (c) $E_2 = 3/2\, E_1$; (d) $E_2 = \sqrt{(5/4)}\, E_1$; (e) $E_2 = 2\, E_1$

(5) Een deeltje met massa *m* beweegt in een rechte lijn, in een Cartesisch stelsel beschreven door $x = b$, $y = b$, $z = ct$, met b en c constanten (c is ongelijk nul) en *t* de tijd. Geef aan welke van de volgende uitspraken juist zijn (*meerdere* mogelijk), steeds over het impulsmoment **L** van het deeltje ten opzichte van de oorsprong:

(a) **L** is ongelijk nul voor alle waardes van b.
(b) **L** is constant in de tijd en hangt van b af.
(c) Het deeltje beweegt rechtlijnig, dus **L** is nul.
(d) De waarde van **L** verandert met *t* en hangt van b en c af.
(e) De waarde van **L** wordt gegeven door het product van de positievector van het deeltje en de component van de snelheid loodrecht daarop.

Opgave 2. (impulsbehoud, 2+2+1+1+2 = 8)

Deeltje 1 met massa m en snelheid v_1 botst in 1 dimensie tegen deeltje 2 met massa M dat stil staat. De botsing is elastisch.

a. Bereken de verandering van de impuls van deeltje 1 als $m = M$.
b. Bereken de verandering van de impuls van deeltje 1 als als $m \ll M$.
c. Laat voor geval (a) zien dat, na de botsing, deeltje 1 minder kinetische energie heeft dan deeltje 2
d. Laat voor geval (b) zien dat, na de botsing, deeltje 2 minder kinetische energie heeft dan deeltje 1.
e. Blijkbaar is er een omslagpunt als functie van de verhouding $\alpha = M/m$. Bereken bij welke waarde voor α beide deeltjes dezelfde kinetische energie hebben. *Je hebt geen rekenmachine, schat evetuele wortels.*

Opgave 3. (oscillatoren, 2+3+2+3= 10)

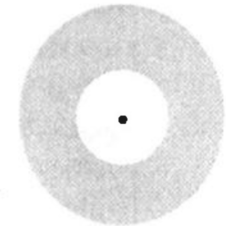
De aantrekkingskracht tussen twee atomen die samen een molecuul vormen wordt vaak beschreven met de zogenoemde Lennard-Jones potentiaal, hier in 1 dimensie :

$V(x) = V_0 \left[\left(\frac{x_0}{x} \right)^{12} - 2 \left(\frac{x_0}{x} \right)^{6} \right]$, met x_0 de evenwichtsafstand

a. Laat met een Taylorexpansie rond evenwicht zien dat de kracht tussen de atomen voor kleine uitwijking leidt tot een lineaire terugdrijvende kracht.
b. De twee atomen (1 en 2) hebben massa's m_1 en m_2. Beschouw het molecuul als een massa-veer systeem waarbij in trilling beide atomen versnellen en vertragen ten opzichte van het evenwichtspunt. Laat met de 3^e wet van Newton zien dat de *relatieve* versnelling a_{rel} van 2 t.o.v. 1 gegeven wordt door $a_{rel} = (m_1 / \mu)\, a_1$, met $\mu = (m_1 m_2) / (m_1 + m_2)$ de gereduceerde massa. Geef a_{rel} ook in termen van a_2.
c. Geef nu de trillingsfrequentie ω van het molecuul in termen van V_0 , x_0 en μ.
d. Het massa-veer systeem hierboven heeft en karakteristieke frequentie ω. Geef een algemene uitdrukking voor de uitwijking van de massa als functie van de tijd. Gebruik ω, en als vrije parameters een maximale uitwijking A en een fase φ. Bereken met deze uitdrukking de *gemiddelde* kinetische energie van de massa μ in één periode.

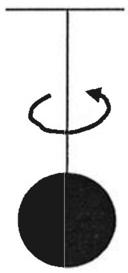
Opgave 4. (traagheidsmomenten, 2+1+2+3+2 = 10)

a. Laat zien dat het traagheidsmoment voor een dunne schijf met massa m en straal a om een as door het middelpunt en loodrecht op de schijf (de z-as), gegeven wordt door $I_z = ½\, ma^2$.
b. De schijf roteert met een hoeksnelheid ω. Geef het impulsmoment L en de kinetische energie K in termen van ω, m en a.
c. Hoe verder van de as van de roterende schijf, hoe meer de massa bijdraagt aan de kinetische energie. Uit de schijf wordt een kleinere schijf met straal $a/2$ en hetzelfde middelpunt verwijderd (zie plaatje). Bereken wat de fractie van de nieuwe kinetische energie is ten opzichte van die van de complete schijf.



Beschouw nu een bol met straal R en massa m, opgehangen aan een massaloze draad met lengte ℓ. De bol kan vrij draaien om de as gegeven door de draad.

d. Laat zien dat het traagheidsmoment I_z van de bol om de as van de draad gegeven wordt door $I_z = 2/5\ \mathrm{m}R^2$. Maak hierbij gebruik van (a)
e. Nu gaat de bol slingeren om een as door het ophangpunt van de draad, en loodrecht daarop (de x-as) . Bereken I_x.



Opgave 5. (roterende assenstelsels, 2+1+3 = 6)
Voor formule niet-inertiaalstelsels en plaatje, zie begrippenblad

a. Een draaischijf met straal b roteert met hoeksnelheid ω om een verticale as door het middelpunt. Een wandelaar met massa m loopt langs een cirkel op $b/2$ tegen de draairichting, met zodanige snelheid dat hij stilstaat voor een externe waarnemer. Welke kracht werkt er op de wandelaar volgens de externe waarnemer ? en welke kracht volgens een waarnemer die in de oorsprong met het coordinatenstelsel meedraait ?

Beschouw een locaal coördinatensysteem met als oorsprong O' het oppervlak van de aarde (draaiend met een hoeksnelheid ω) op noorderbreedte λ. De x'-as wijst naar het oosten, de y'-as naar het noorden, de z'-as omhoog, zie het plaatje op het begrippenblad.

b. Teken de cirkel waar noordpool, zuidpool en O' op liggen. Teken in O' de vector ω en de componenten van ω langs y' en z' . Doe hetzelfde voor een O' op *zuiderbreedte* λ.
c. In dit systeem heeft een object een constante snelheid v in oostelijke richting (dus langs x'). Bereken de componenten van $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'$ en geef daarmee aan welke componenten de Corioliskracht heeft : omhoog (z') / omlaag (-z') en/of noord (y') / zuid (-y'), voor de gevallen $\lambda > 0$ en $\lambda < 0$.

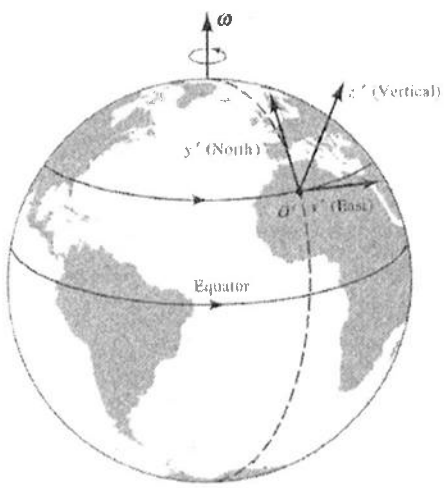
Begrippen en formules

engels	nederlands	
momentum	impuls	ook 'hoeveelheid van beweging'
angular momentum	impulsmoment	ook 'draai-impuls', 'hoekmoment'
moment of force	krachtmoment	ook 'torque'(E) ; 'moment', 'draaimoment' (N)
moment of inertia	traagheidsmoment	

De formule voor de beweging van een deeltje in een niet-inertiaalsysteem :

$$\mathbf{F} - m\mathbf{A}_0 - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') = m\boldsymbol{a}'$$

met alle 'geaccentueerde' grootheden gemeten in het bewegende assenstelsel. **F** is een echte kracht, $\mathbf{A}_0$ is de versnelling van het bewegende assenstelsel, $\boldsymbol{\omega}$ de hoeksnelheid van het bewegende assenstelsel. Je moet weten hoe de verschillende termen heten.



Plaatje voor opgave 5.

--- EINDE ---