Tentamen Klassieke Mechanica a , 3 juni 2016 , 14u00 – 17u00

Let op – lees onderstaande goed door!

Het tentamen bestaat uit **4** opgaven, onder de laatste staat 'Einde'. Het totaal aantal te behalen punten is **45,** het aantal voor de individuele onderdelen is aangegeven. Er mag geen elektronische apparatuur gebruikt worden.

- Maak iedere opgave op een **apart blad**, omdat opgaven ieder apart worden nagekeken.
- Schrijf op ieder blad je **naam** en **studentnummer**.
- Alle **telefoons** moeten **uit** staan, in je **tas/jas** zitten, en mogen tijdens het tentamen niet tevoorschijn worden gehaald.
- Schrijf duidelijk en werk overzichtelijk. Kladpapier wordt niet nagekeken.
- Bij constatering van **fraude** wordt de student van verdere deelname aan het tentamen uitgesloten. Dit zal tevens aan de examencommissie worden doorgegeven.
- Denk aan de enquête.

VEEL SUCCES!

Opgave 1. (beweging, wrijving, 2+2+2+2+2 = 10)

a. Een deeltje met massa m beweegt in in 1 dimensie. Op $t = 0$ is het in rust. Er werkt een kracht gegeven door $F = F_0 + ct$ met t de tijd. Geef een uitdrukking voor de snelheid v als functie van t.
b. Nu wordt de kracht gegeven door $F = F_0 \cos(cx)$, met x de plaats (let op : NIET de tijd). Geef een uitdrukking voor de snelheid v als functie van x.
c. Een deeltje met massa m beweegt in 1 dimensie. Op $t = 0$ heeft het een snelheid v_0, het ondervindt een luchtweerstand ter grootte $c_1 v^2$. Geef een uitdrukking voor v en voor de positie x als functie van de tijd.
d. Bereken voor dit deeltje het energieverlies per tijdseenheid als functie van de tijd.
e. Gegeven een twee-dimensionale potentiële energie functie $V(\boldsymbol{r}) = V_0 - ½\, ka^2\, e^{-r^2/a^2}$, met $\mathbf{r} = \mathbf{i}\,x + \mathbf{j}\,y$. Bereken het twee-dimensionale krachtveld $\mathbf{F}$. Geef aan of dit een conservatief veld is.

Opgave 2. (oscillatoren, 2+2+2+3+3 = 12)

Beschouw een conservatieve kracht op een deeltje in 1 dimensie. De kracht is zodanig dat er posities x zijn waar het deeltje in evenwicht is. De potentiële energie functie V(x) in de buurt van zo'n evenwichtspunt kan ontwikkeld worden in een Taylor-reeks.

a. Neem $x = 0$ als evenwichtspunt en schrijf de termen van die ontwikkeling op tot en met $O(x^2)$. Noem $V'(0) = k_1$, $V''(0) = k_2$. Leg uit waarom $k_1 = 0$ in evenwicht, en aan welke eis V''(0) moet voldoen voor een harmonische beweging van het deeltje.
b. Weer in 1 dimensie worden twee ladingen q geplaatst op respectievelijk $x = a$ en $x = -a$. Een vrije lading q met massa m wordt in de buurt van x = 0 geplaatst. Neem als algemene vorm van de kracht tussen de ladingen $F = c / r^2$ met r de afstand tussen de ladingen. Bereken de resonantiefrequentie van deze beweging (*hint : gebruik wat je weet over V''(0) uit de a-vraag)*.
c. Geef een algemene uitdrukking voor uitwijking als functie van tijd van een harmonische oscillator gekarakteriseerd door een deeltje met massa m en een veerconstante k. Laat zien dat de *gemiddelde* kinetische energie van de oscillator gelijk is aan de *gemiddelde* potentiële energie van de oscillator.
d. De uitdrukking voor een aangedreven gedempte harmonische oscillator is $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 e^{i\omega t}$. Gebruik de steady-state oplossing $x(t) = Ae^{i(\omega t - \varphi)}$om af te leiden dat de fase φ tussen aandrijving en uitwijking gegeven wordt door $\tan(\varphi) = c\omega/(k - m\omega^2)$, en schrijf dit vervolgens als een uitdrukking in termen van de ongedempte resonantiefrequentie ω_0.
e. Geef een uitdrukking die het vermogen P (arbeid per tijdseenheid) berekent die de aandrijving levert aan het bewegende deeltje. Laat zien dat P maximaal is bij ω_0.

Opgave 3. (meerdeeltjes systemen, 2+2+2+2+3 = 11)

a. Gegeven een systeem van *n* deeltjes met massa's m_i plaatsvector $\vec{r}_i$ en snelheid $\vec{v}_i$ Geef een uitdrukking voor de positie van het massamiddelpunt $\vec{r}_{CM}$ en gebruik $\vec{r}_{CM}$ om een uitdrukking voor de totale impuls van het systeem te geven.

b. Gegeven twee deeltjes, beide met massa *m* en snelheid *v*. Deeltje 1 draait in een cirkel rond de oorsprong op afstand *r*. De cirkel definieert het *x-y* vlak Op t = 0 bevindt het deeltje zich op $x = -r$, $y = 0$. Deeltje 2 beweegt langs een rechte baan met z = *r* (dus boven het *x-y* vlak) en $y = 0$ langs de *x*-as. Op $t = 0$ bevindt het zich op $x = r / 2$. Geef een schets van dit systeem bij $t = 0$ en geef duidelijk je assenstelsel aan. Geef de grootte en de richting van het totale impulsmoment ***L*** van het systeem ten opzichte van een waarnemer in de oorsprong.

c. Twee deeltjes met massa's m_1 en m_2 en snelheden $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ botsen *inelastisch* op elkaar en blijven aan elkaar vast zitten. Bereken de snelheid $\vec{v}_f$ van het nieuwe systeem en laat zien dat de gedissipeerde energie $\Delta E = ½\, \mu\, |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|^2$, met $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ (de gereduceerde massa).

d. Bereken het traagheidsmoment *I* van een staaf met lengte ℓ, massa *m*, om een as door het uiteinde. Bereken vervolgens *I* voor een as door het massamiddelpunt.

e. Slingerklokken hebben vaak een slinger die bestaat uit een dunne schijf (straal *a*, massa *m*) aan het einde van een staaf (lengte $\ell = 5a$, massa 0.3 *m*). Het centrum van de schijf zit aan het einde van de staaf. Het systeem slingert om een as aan het andere uiteinde van de staaf. Bereken het traagheidsmoment *I* van dit systeem in termen van m en a.

Opgave 4. (roterende assenstelsels, 2+2+3+2+3 = 12)

Voor formule niet-inertiaalstelsels, zie begrippenblad

a. Een draaischijf met straal *b* roteert met hoeksnelheid ω om een verticale as door het middelpunt. Een wandelaar met massa *m* staat stil op de schijf halverwege as en rand. Maak een schets van de schijnkrachten die werken, gezien vanuit een meedraaiend coördinatensysteem dat vastzit aan het middelpunt van de schijf, en geef de grootte van die krachten. Geef ook richting en grootte van de echte kracht **F** en geef aan waar die door wordt opgebracht.

b. Geef nu aan hoe een waarnemer van buiten tegen hetzelfde probleem aan kijkt. Hoe berekent deze grootte en richting van de echte kracht **F**.

c. Nu loopt de wandelaar met een snelheid v over een cirkel met straal b/2, tegen de draairichting in. Geef weer de echte kracht **F** zoals een waarnemer van buiten die berekent en laat zien hoe de waarnemer op de schijf tot dezelfde conclusie komt.

Beschouw nu een locaal coördinatensysteem met als oorsprong het oppervlak van de aarde (draaiend met een hoeksnelheid ω) op noorderbreedte λ. De x'-as wijst naar het oosten, de y'-as naar het noorden, de z'-as omhoog, zie het plaatje op het begrippen×blad.

d. In dit systeem valt een object met constante snelheid *v* naar beneden. Geef een schets met de relevante vectoren in het locale systeem. Geef aan welke componenten de Corioliskracht heeft : oost / west en/of noord/ zuid, voor de gevallen $\lambda > 0$ en $\lambda < 0$.
N.B. deze vraag vereist geen rekenwerk, alleen kennis van vectoren en hun richtingen.

e. Nu wel wat rekenwerk. Geef de componenten van ω langs de x'- , y'- , z'-assen. Laat hiermee zien dat een een deeltje met snelheid $v' = \mathbf{i}\, v_{x'} + \mathbf{j}\, v_{y'}$ een Coriolisversnelling ondervindt die onafhankelijk is van de richting van de snelheid.

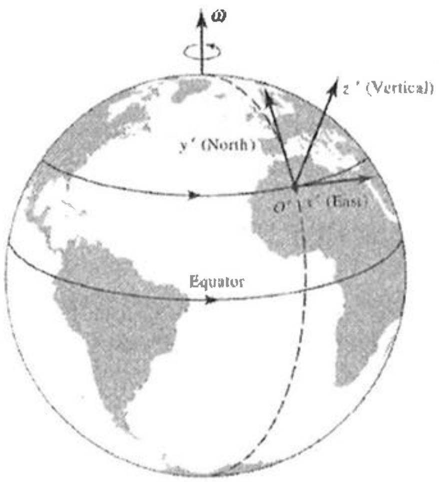
Begrippen en formules

engels	nederlands	
momentum	impuls	ook 'hoeveelheid van beweging'
angular momentum	impulsmoment	ook 'draai-impuls', 'hoekmoment'
moment of force	krachtmoment	ook 'torque'(E) ; 'moment', 'draaimoment' (N)
moment of inertia	traagheidsmoment	

De formule voor de beweging van een deeltje in een niet-inertiaalsysteem :

$$\mathbf{F} - m\mathbf{A_0} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') = m\boldsymbol{a}'$$

met alle 'geaccentueerde' grootheden gemeten in het bewegende assenstelsel. **F** is een echte kracht, $\mathbf{A_0}$ is de versnelling van het bewegende assenstelsel, $\boldsymbol{\omega}$ de hoeksnelheid van het bewegende assenstelsel. Je moet weten hoe de verschillende termen heten.



Plaatje voor opgave 4d.

--- EINDE ---