Hertentamen Klassieke Mechanica a , 15 juli 2015 , 14u00 – 17u00

Let op – lees onderstaande goed door!

Het tentamen bestaat uit **4** opgaven. Het totaal aantal te behalen punten is 48, het aantal voor de individuele onderdelen is aangegeven. Er mag geen elektronische apparatuur gebruikt worden. Noteer het antwoord op meerkeuze vragen als *letter + antwoord* op je uitwerkingsblad, en *niet* op het opgaveblad.

- Maak iedere opgave op een **apart blad**, omdat opgaven ieder apart worden nagekeken.
- Schrijf op ieder blad je **naam** en **studentnummer**.
- Alle **telefoons** moeten **uit** staan, in je **tas/jas** zitten, en mogen tijdens het tentamen niet tevoorschijn worden gehaald.
- Schrijf duidelijk en werk overzichtelijk. Kladpapier wordt niet nagekeken.
- Denk aan *interpret* / *develop (a plan) / evaluate / assess*
- Bij constatering van **fraude** wordt de student van verdere deelname aan het tentamen uitgesloten. Dit zal tevens aan de examencommissie worden doorgegeven.

VEEL SUCCES!

Versie met uitwerkingen

Tweede lezer : Tom v.d. Reep. MSc.

Opgave 1. (divers. 6 x 2 = 12).

(1) Een bal wordt door een ingedrukte veer rechtstandig de lucht in geschoten en bereikt een hoogte van 24 m. Vervolgens wordt dezelfde bal afgeschoten, maar nu wordt de veer slechts half zo diep ingedrukt. De bereikte hoogte is nu :
(a) 48 m ; (b) 24 m; (c) 12 m ; (d) 6 m ; (e) 3 m.

(d) 6 m ; de energie van de veer is ¼.

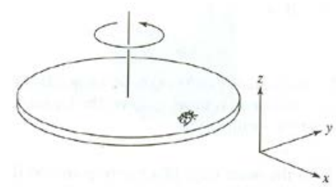
(2) Een tafeltennisbal en een bowling bal rollen naar je toe. Beide ballen hebben dezelfde hoeveelheid impuls. Je brengt de ballen tot rust door tegen de beweging in te duwen, en je gebruikt in beide gevallen dezelfde kracht. Wat kun je zeggen over de *afstand* waarover ieder bal tot stilstand komt ?
(a) De afstand is voor de tafeltennisbal kleiner ; (b) beide afstanden zijn gelijk ; (c) De afstand is voor de tafeltennisbal groter.

(c) *groter voor de tafeltennisbal ; die is lichter, zijn snelheid is dus groter, en de kinetische energie ook. Het kost dus meer arbeid ofwel bij dezelfde kracht meer Δs.*

(3) Een object ligt op een helling, maar beweegt niet vanwege de wrijving. Nu wordt de hellingshoek groter gemaakt, en het object begint te glijden. Als de hellingshoek verder dezelfde waarde houdt, wat gebeurt er met het object ?
(a) het vertraagt weer ; (b) het houdt een constante snelheid ; (c) het versnelt

(c) het versnelt. De kracht is groter dan de wrijvingskracht.

(4) Beschouw een steen op een draaiende schijf met assen zoals hiernaast getekend. Neem aan dat het assenstelsel meedraait met de schijf en dat de steen op de x-as ligt. In dit assenstelsel is de versnelling van de steen :



(a) langs +x ; (b) langs –x ; (c) langs +y ; (d) langs –y ; (e) gelijk aan nul.

(e) gelijk aan nul, de steen beweegt niet.

(5) Een ring met straal R en massa m draait om een as door het midden van de ring en loodrecht op het vlak van de ring. Aan de ring is een bepaalde hoeveelheid energie *E* gegeven, waardoor de hoeksnelheid ω_1 is. Nu wordt een kogeltje, ook met massa m, aan de ring bevestigd. Dezelfde hoeveelheid energie wordt toegevoerd, wat leidt tot een hoeksnelheid ω_2. Er geldt :
(a) $\omega_2 = 2\,\omega_1$; (b) $\omega_2 = \sqrt{2}\,\omega_1$; (c) $\omega_2 = \omega_1$; (d) $\omega_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\omega_1$; (e) $\omega_2 = \frac{1}{2}\,\omega_1$

(d) $K_{rot} = \frac{1}{2} I\omega^2$ *, I wordt 2x groter, dus* ω^2 *2x kleiner*

(6) Een deeltje beweegt in een rechte lijn, in een Cartesisch stelsel beschreven door x = b, y = 0, z = ct, met b en c konstanten en t de tijd. Heeft dit deeltje een impulsmoment **L**?
(a) ja, en **L** is konstant ; (b) nee, door de rechtlijnige beweging ; (c) ja, en **L** verandert met de tijd.

(a) L is constant ; geen torsiekracht

$\boxed{\text{d c c e d a}}$

Opgave 2. (beweging in meer dimensies; (2+2+2+2+2+2 = 12)

Gegeven is een 2-dimensionale functie voor de potentiële energie $V(\vec{r}) = V_0 - \frac{1}{2}k\delta^2 e^{-r^2/\delta^2}$, met V_0, k, δ constantes en $\vec{r}$ een plaatsvector van de vorm **i**x + **j**y.

a. Bereken de (vector)kracht $\vec{F}(\vec{r})$.
b. Laat zien, voor kleine uitwijkingen ε vanaf de oorsprong, dat de potentiële energie die van een harmonische oscillator (H.O.) is, en dat F leidt tot de bewegingsvergelijking van een H.O.
c. Een deeltje met massa m heeft in de oorsprong een snelheid $v_x = v_0$ en $v_y = 0$. Gebruik de energievergelijking om v_x te berekenen als functie van ε (ofwel kleine x) voor y=0.

Vervolgens bekijken we een deeltje dat in twee dimensies beweegt onder invloed van luchtwrijving en zwaartekracht. De luchtwrijving is evenredig met de snelheid, de evenredigheidskonstante heet γ. Gebruik voor de plaatsvector de vorm $\vec{r}$ = **i**x + **k**z . Bij t = 0 is de snelheid in de horizontale (x-)richting $v_{0,x}$, de snelheid in de verticale (z-)richting is $v_{0,y}$.

d. Schrijf de bewegingsvergelijking op in vectorvorm, in termen van de plaatsvector $\vec{r}$ en de snelheidsvector $\vec{v}$.
e. Bereken met deze vergelijking de snelheid langs de x-richting $v_x(t)$ en de snelheid langs de z-richting $v_z(t)$
f. Laat voor de positie x zien dat $x \to \frac{v_{0,x}}{\gamma}$ voor $t \to \infty$

Dit is voorbeeld 4.2.1.

(a) Schrijf $V(x,y) = V_0 - \frac{1}{2}k\delta^2 e^{-(x^2+y^2)/\delta^2}$. *Daarna* $F = -\vec{\nabla}V$, *waaruit volgt* $\vec{F} = -k\vec{r}e^{-(r^2)/\delta^2}$

(b) Ontwikkelen van V(r) geeft vorm $1-\varepsilon^2$*, dat is een HO. Voor F is de ontwikkeling (uiteraard)* $-k\varepsilon$

(c) $\frac{1}{2} mv^2+V(r) = \frac{1}{2} mv_0^2+ V(0)$, $v^2 = v_{0,x}^2 +2/m\, [V(0) - V(x)] =$

$v_{0,x}^2 +2/m\, [(V_0 - \frac{1}{2} k\delta^2) -(V_0 - \frac{1}{2} k\delta^2 \exp(-\varepsilon^2/\delta^2)) =.. = v_{0,x}^2 - k/m\, \varepsilon^2$ *en stel 0*

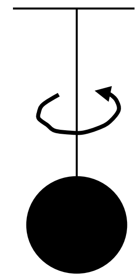
(d) $m\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = -\gamma\vec{v} - \vec{k}mg$

(e) Bedenk dat v = dr/dt zodat $\dot{x} = \dot{x}_0 e^{-(\gamma/m)t}$ *en* $\dot{z} = \dot{z}_0 e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma}(1 - e^{-(\frac{\gamma}{m})t})$

(f) Nog een keer integreren levert $x = \frac{m\,\dot{x}_0}{\gamma}(1 - e^{-(\frac{\gamma}{m})t})$

Opgave 3. (traagheidsmomenten, trillingen, 2+1+2+2+2+3 = 12)

a. Geef een uitdrukking voor het traagheidsmoment *I* van een stijf lichaam om een bepaalde as in integraalvorm, het impulsmoment (angular momentum) *L* in termen van *I* en de hoeksnelheid ω, en het moment (de 'torque') *N* in termen van *I* en de hoeksnelheid ω.
b. Geef een uitdrukking voor de rotationele kinetische energie van een draaiend lichaam in termen van *I* en ω, en laat zien dat dit inderdaad de dimensie van energie heeft
c. Laat zien dat het traagheidsmoment van een bol met straal R en massa m, draaiend om een as door het middelpunt, gelijk is aan 2/5 mR^2



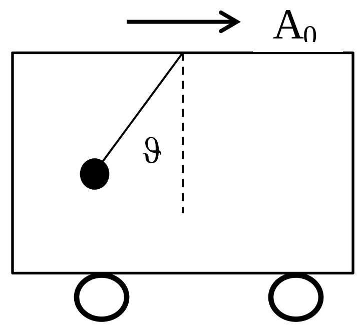
De bol wordt verticaal opgehangen aan een massaloze draad. De bol wordt nu om de as van de draad verdraaid over een hoek α. De draad levert een terugdraaiend moment ter grootte kα. Bij het loslaten draait de bol weer richting evenwichtsstand.
d. Schrijf de bewegingsvergelijking van het systeem op in termen van *I*, k, α, en bereken de resonante hoekfrequentie ω_0.
e. Geef een oplossing van de bewegingsvergelijking. De maximale uitwijking is α_0 op t = 0. Bereken de hoeksnelheid als het systeem door de evenwichtspositie gaat en bereken de gemiddelde waarde van de *potentiële* energie van dit systeem in termen van α_0, ω_0 en I.

Voeg nu demping toe aan de bewegingsvergelijking met een term evenredig aan de hoeksnelheid. Noem de konstante c.
f. Geef een uitdrukking voor de energie *E* van de gedempte oscillator in termen van *I*, k, α en c. Bereken de waardes van de verandering van *E* per tijdseenheid (de d*E* / dt) zowel voor het ongedempte als het gedempte geval.

(a) $I = \int r^2 dm$; $L = I\,\omega$; $N = I\ d\omega/dt = I\,\dot{\omega}$
(b) $[\,I\,\omega^2\,] = m^2\ kg / s^2$. *Vergelijk met* $[J] = [N\,m] = kg\ m^2 / s^2$
(c) I voor een dun schijfje volgt via $dm = 2\pi r dr\ \sigma$ *zodat* $I = \int 2\pi r^3\sigma\ dr = \frac{1}{2}\pi\, r^4\sigma = \frac{1}{2}m\, r^2$.
De straal van het schijfje is $R^2 - z^2$, *en voor de bol* $dI = ½\, r^2 dm = ½\, r^2\ \pi r^2\rho\ dz$ *zodat*
$I = \frac{1}{2}\rho\pi \int r^4\ dz = \frac{1}{2}\rho\pi \int (R^2 - z^2)^2\ dz = \frac{1}{2}\rho\pi\left(R^4 z - \frac{2}{3}R^2 z^3 + \frac{1}{5}z^5\right)$. *Neem 0 – R en x2 :*
$I = \pi\rho\,\frac{8}{15}R^5$ *, met* $m = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$ *geeft* $I = \frac{2}{5}m\,R^2$

(d) $I\ d^2\alpha/dt^2 = -k\alpha$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I}}$
(e) $\alpha = \alpha_0 \cos(\omega_0 t)$, *of* $\alpha_0 \sin(\omega_0 t + \pi/2)$, *de snelheid wordt* $-\alpha_0\,\omega_0 \sin(\omega_0 t)$, *dus* $-\alpha_0\,\omega_0$. *De potentiele energie is* $½\, k\alpha^2$, *het gemiddelde* $½\, k\alpha_0^2\, \frac{1}{T_0}\int \cos^2\omega_0 t$, *wordt* $¼\, k\,\alpha_0^2 = ¼\, \omega_0^2 I\,\alpha_0^2$.
(f) De vergelijking wordt $I\ d^2\alpha/dt^2 + k\alpha + c\omega = 0$
De energie is op ieder moment $½\, I\omega^2 + ½\, k\alpha^2$. *Dit is konstant als ongedempt, in het algemeen*
$dE/dt = I\omega\ d\omega/dt + k\alpha\ d\alpha/dt = (I\ d\omega/dt + k\alpha)\ \omega = -c\omega^2$

Opgave 4. (roterende assenstelsels, 2+2+2+3+3 = 12)
Voor deze opgave staat onderaan de bekende formule voor de bewegingsvergelijking in een niet-inertiaalsysteem als geheugensteuntje.



Hiernaast het plaatje van een treinwagon die versnelt met een versnelling A_0. In de wagen hangt een bal aan een touw, die door de versnelling een uitwijking ϑ krijgt ten opzichte van de loodlijn vanaf het plafond.

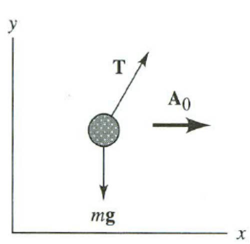
a. Teken de (twee) krachten die op de bal werken, gezien door een waarnemer *buiten* de trein. Laat zien dat uit het krachtdiagram volgt dat $A_0 = g \tan \vartheta$
b. Teken nu het krachtdiagram voor een waarnemer *binnen* de trein. Hiervoor heb je een schijnkracht nodig. Geef de richting, en laat zien dat de grootte mA_0 is.

Vervolgens bekijken we een bal aan een touw, opgehangen aan een frame op het oppervlak van de aarde (de ‘plumb bob’)

c. Maak een schets van echte krachten en schijnkrachten, en leg in woorden uit waarom de as van het touw niet naar het middelpunt van de aarde wijst, wat leidt tot een effectieve waarde van g.

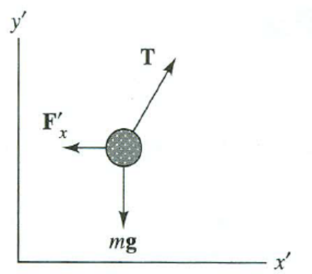
Tenslotte laten we een bal aan het oppervlak van de aarde uit stilstand vallen. De bewegings-vergelijking, onder verwaarlozing van de centrifugale schijnkracht, is dan
$\mathbf{mg} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' = m\boldsymbol{a}'$, met g de effectieve valversnelling.

d. Werk dit uit voor afzonderlijke bewegingsvergelijkingen in de x-, y- en z-richting voor een noorderbreedte gegeven door een hoek λ.
e. Laat zien dat $a_x' = 1/3\ \omega g t^3 \cos\lambda$, als je de snelheid v_y' mag verwaarlozen.



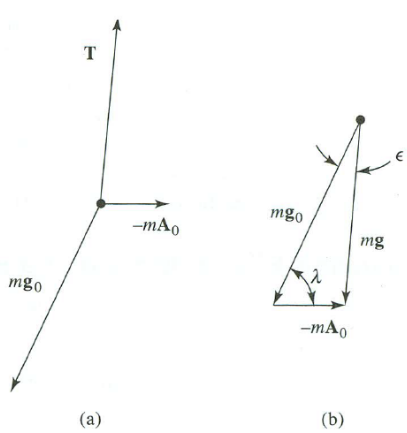
(a,b)

$T \sin \vartheta = mA_0$
$T \cos \vartheta - mg = 0$
$A_0 = g \tan \vartheta$



$F + F' = ma' = 0$
$T \sin \vartheta - F_x' = 0$
$T \cos \vartheta - mg = 0$
$F_x' = mg \tan \vartheta$

(c)



g is de richting in het verlengde van T

(d) kies $\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{k'}\, g$ *, en* $\omega_{x'} = 0$ *,* $\omega_{y'} = \omega \cos\lambda$ *,* $\omega_{z'} = \omega \sin\lambda$
Uit het kruisproduct volgt dan

$\boldsymbol{i'}$: $-\omega \sin\lambda\, v_{y'} + \omega \cos\lambda\, v_{z'}$ *en dus* $x'' = -2\omega \sin\lambda\, v_{y'} + 2\omega\cos\lambda\, v_{z'}$
$\boldsymbol{j'}$: $\omega\, v_{x'} \sin\lambda$ $y'' = 2\omega\, v_{x'} \sin\lambda$
$\boldsymbol{k'}$: $-\omega\, v_{x'} \cos\lambda$ $z'' = -g + 2\omega\, v_{x'} \cos\lambda$

(e) Dit was een naar foutje. Ik had x' willen vragen, niet a' ; x' uit 2x integreren.
Deze vraag zal dus niet meetellen voor het eindcijfer.

N.B. Voor een niet-inertiaalsysteem heb je geleerd dat de wet van Newton, $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$*, die geldt in een inetiaalsysteem en waarbij* $\boldsymbol{F}$ *en* $\boldsymbol{a}$ *een echte kracht en versnelling zijn, vervangen moet worden door*

$$\boldsymbol{F} - m\boldsymbol{A_0} - 2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}' - m\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}' - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}') = m\boldsymbol{a}' \quad (1)$$

met alle 'geaccentueerde' grootheden gemeten in het bewegende assenstelsel.

--- EINDE ---