Tentamen Klassieke Mechanica a , 12 juni 2015 , 14u00 – 17u00

Let op – lees onderstaande goed door!

Het tentamen bestaat uit **4** opgaven. Het totaal aantal te behalen punten is 46, het aantal voor de individuele onderdelen is aangegeven. Er mag geen elektronische apparatuur gebruikt worden. Noteer het antwoord op meerkeuze vragen als *letter + antwoord* op je uitwerkingsblad, en *niet* op het opgaveblad.

- Maak iedere opgave op een **apart blad**, omdat opgaven ieder apart worden nagekeken.
- Schrijf op ieder blad je **naam** en **studentnummer**.
- Alle **telefoons** moeten **uit** staan, in je **tas/jas** zitten, en mogen tijdens het tentamen niet tevoorschijn worden gehaald.
- Schrijf duidelijk en werk overzichtelijk. Kladpapier wordt niet nagekeken.
- Denk aan *interpret* / *develop (a plan)* / *evaluate* / *assess*
- Bij constatering van **fraude** wordt de student van verdere deelname aan het tentamen uitgesloten. Dit zal tevens aan de examencommissie worden doorgegeven.

VEEL SUCCES!

Versie met uitwerkingen

Tweede lezer : Tom v.d. Reep. MSc.

Opgave 1. (divers. 6 x 2 = 12)

(1) Je staat op een hoge rots en gooit een bal met een snelheid *v omhoog*, en een andere met een snelheid *v omlaag*. Verwaarloos luchtweerstand en geef aan welke bal met de grootste snelheid de grond raakt :
(a) de omhoog gegooide bal; (b) de naar beneden gegooide bal; (c) ze hebben dezelfde snelheid.

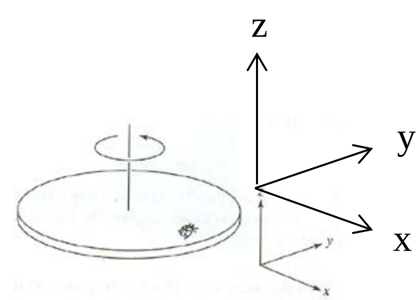
(c) dezelfde: E_k *en* E_{pot} *zijn gelijk*

(2) Twee karretje met massa m en $2m$ staan op wrijvingsloze rails. Je duwt na elkaar beide karretjes gedurende een tijd t met dezelfde kracht. Is de kinetische energie van de lichte kar (massa m):
(a) groter dan ; (b) gelijk aan ; (c) kleiner dan de kinetische energie van de zware kar ?

(a) groter dan: Δmv is hetzelfde, dus v wordt 2x groter voor de lichtere kar, E_k *4/2 = 2x*

(3) Een steen wordt omhoog gegooid in de aanwezigheid van zwaartekracht en luchtwrijving. Geef aan of de tijd om maximale hoogte te bereiken
(a) groter is dan ; (b) gelijk is aan ; (c) kleiner is dan
de tijd om vanaf maximale hoogte weer bij het startpunt te komen

(c) kleiner dan; de kinetische energie op de terugweg is lager



(4) Beschouw een steen op een draaiende schijf met assen zoals hiernaast getekend. De schijf vertraagt. Geef de richting van de *tangentiële* component van de versnelling van de steen gezien in het inertiaalsysteem van een vast assenstelsel. Is die
(a) langs +x ; (b) langs –x ; (c) langs +y ; (d) langs –y ; (e) gelijk aan nul.

(d) langs –y. De tangentiale snelheid is lang +y en die wordt minder

(5) Een schaatser tolt om zijn (haar) as met uitgestrekte armen. Bij het intrekken van de armen wordt het traagheidsmoment I kleiner en de hoeksnelheid ω groter omdat het impulsmoment behouden is. Vergelijk de rotationele kinetische energie K_{rot} in de eindtoestand met die in de begintoestand : in de eindtoestand is K_{rot} :
(a) gelijk aan ; (b) groter dan ; (c) kleiner dan K_{rot} in de begintoestand.

(b) groter dan; $K_{rot} = \frac{1}{2} L\omega$*, L is constant, ω neemt toe*

(6) Een deeltje beweegt in een rechte lijn, in een Cartesisch stelsel beschreven door x = b, y = 0, z = ct, met b en c konstanten en t de tijd. Heeft dit deeltje een impulsmoment **L**?
(a) ja, en **L** is konstant ; (b) nee, door de rechtlijnige beweging ; (c) ja, en **L** verandert met de tijd.

(a) L is constant ; geen torsiekracht

c ; a ; c ; d ; b ; a

Opgave 2. (beweging met wrijving; (2+1+3+2+2 = 10)
Een waterdruppel met massa *m* begint te vallen onder invloed van zwaartekracht (versnelling *g*) met beginsnelheid 0 op een positie z_0. Er werkt nog geen wrijving.

a. Geef de energievergelijking en stel daarmee een uitdrukking op voor de snelheid *v* op positie *z*.
b. Op positie z_0 / 2 wordt de tijd t = 0 gezet en begint een lineaire wrijvingskracht te werken (van het type $c_1\,v$). Geef de dimensie van c_1 in S.I. eenheden.
c. Schrijf de bewegingsvergelijking op in termen van de snelheid *v* , waarbij de richting naar beneden als positief genomen wordt, en geef de volledige uitdrukking voor de snelheid als functie van de tijd, waarin z_0 verwerkt is. Laat zien dat de eindsnelheid v_t (de 'terminal velocity') gegeven wordt door $v_t = (mg)/c_1$.
d. Definieer een 'karakteristieke tijd' τ in termen van de diverse gegevens en geef een uitdrukking voor *v* als functie van (alleen) v_0 , v_t , en τ. Geef voor het geval dat $v_0 = 0$ een ruwe schatting (zonder rekenmachine) van het procentuele verschil tussen *v* en v_t op t = 3 τ.
e. Op t = 3 τ breekt de druppel in twee gelijke delen die beiden langs de *z*-as verder vallen. De waarde van c_1 blijft hetzelfde. Geef een complete schets van het gedrag van de snelheid v / v_t (op de y-as) als functie van t / τ (op de x-as), vanaf t = 0; eerst van de hele druppel, gevolgd door een halve (ze doen beiden hetzelfde) . Zet getallen langs assen.

a. $T_0 + V(x_0) = T + V(x) = E.$ *Leidt tot* $\frac{1}{2}mv^2 + mgh = E$ *en* $v^2 = 2g\,z$

b. $c_1 v$ *is [N], dus* c_1 *is [N s/m = kg m/s^2 s/m = kg / s . Op dit moment is* $v = \sqrt{(g\,z_0)}$

c. $m\,dv/dt = mg - c_1v$. *Let op : mg is naar beneden,* c_1v *staat er tegenin en heeft dus – teken*
Separeren in v en t geeft
$m\,dv / (mg - c_1 v) = dt$ *en integreren* $-\frac{m}{c_1}\ln\{\frac{mg - c_1v}{mg - c_1v_0}\}) = t$ *, waarbij het- teken nu uit* $(-c_1)$ *komt, of uit 'integreren over –v', naar smaak. Bij naar boven = positief kiezen is er ook een –teken, maar staan er +en in de ln.*

Dit leidt tot $v = \frac{mg}{c_1} + \left(v_0 - \frac{mg}{c_1}\right)e^{-c_1t/m}$ *; voor t= 0, v =* v_0. *en* $v_0 = \sqrt{(g\,z_0)}$

d. *Dat moet* $\tau = m / c_1$ *zijn en wordt* $v = v_t + (v_0 - v_t)\,e^{-t/\tau}$ *ofwel* $= v_t\,(1 - e^{-t/\tau}) + v_0\,e^{-t/\tau}$
op 3 τ *staat er* e^{-3}*, dat is ongeveer 1/27, dus 4 %.*

e. *v gaat exp naar* v_t *. Let op :* v_t *kan groter of kleiner zijn dan* v_0 *! Bij 3*τ *halveert de massa en daarmee de eindsnelheid. Merk op dat de nieuwe* $\tau' = \tau/2$*, de eindsnelheid wordt dus sneller bereikt.*

Opgave 3. (deeltjes en slingers, 2+1+2+2+3+2 = 12)

Beschouw een verzameling deeltjes met massa's m_i en posities $\boldsymbol{r}_i$. De som van alle massa's is m.

a. Geef de definite voor de positie $\boldsymbol{r}_{cm}$ van het massacentrum van het systeem en gebruik deze om te laten zien dat de impuls $\boldsymbol{p}$ van het systeeem gegeven wordt door $\boldsymbol{p} = m\, \boldsymbol{v}_{cm}$.

Als er externe krachten $\mathbf{F_i}$ werken op alle deeltjes i, en interne krachten $\mathbf{F_{ij}}$ tussen alle deeltjes i en j, laat kun je laten zien dat $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i = \mathrm{m}\, \mathbf{a_{cm}}$ met $\mathbf{a_{cm}}$ de versnelling van het massazwaartepunt.

b. Geef in woorden aan welke van de wetten van Newton gebruikt is, en hoe, om tot dit resultaat te komen.

c. Beschouw nu een dunne staaf met een massadichtheid ρ [kg / m] en een lengte a, opgehangen aan een as door zijn massamiddelpunt. Geef in een diagram aan welke krachten er werken, met hun aangrijpingspunt, in termen van de externe somkracht **F**. Geef ook aan welke posities van de staaf (varierend van vericaal tot horizontaal) je beschouwt als evenwichtsposities.

d. De staaf wordt aan een uiteinde opgehangen. We noemen hem nu slinger. Maak een schets van de slinger met een kleine uitwijking uit de verticale evenwichtsstand, gegeven door een hoek ϑ, waarin kracht, richting, en aangrijpingspunt staan. Laat zien dat de bewegingsvergelijking die van een harmonische oscillator is, in termen van ρ, g, a, ϑ en het traagheidsmoment I_e van de staaf rond een as door het ophangpunt (het uiteinde).

e. Laat zien dat de hoekfrequentie van de slinger gegeven wordt door $\omega_0 = \sqrt{(3g)/(2a)}$.

f. De kleine uitwijking die de slinger krijgt op t = 0 is ϑ_0. Geef de oplossing van de bewegingsvergelijking voor ϑ(t), en bereken hiermee de energie E die gemiddeld in een slingering aanwezig is in termen van ρ, ϑ_0,g, en a. Laat zien dat de dimensie van je antwoord inderdaad energie is.

a. $\boldsymbol{r}_{cm} = \sum \boldsymbol{r}_i m_i \,/\, m$ *, waarbij* $m = \sum m_i$ *; bedenk dat* $\boldsymbol{p} = \sum p_i = \sum m_i\, v_i$ *en d/dt* $\boldsymbol{r}_{cm} = \boldsymbol{v}_{cm}$

b. de derde wet van Newton, actie = - reactie. Hierdoor vallen de interne krachten tegen elkaar weg.

c. De externe kracht grijpt aan op het massamiddelpunt, en dat beweegt niet. Er is dus nog een kracht, namelijk de reactiekracht op de (ophang)as. Er is geen moment of koppel, dus alle posities zijn evenwicht (zoals een keer op werkcollege besproken).

d. Alweer aangrijpen op massamiddelpunt, wat nu leidt tot een moment. Gebruik $N = I\dot{\omega}$ *en* $\dot{\omega} = d\vartheta/dt$ *en* $x_{cm} = a/2$ *om te laten zien dat* $I\ddot{\vartheta} = \rho a \,\frac{a}{2}\, g\, sin\theta$, *en dan* $sin\vartheta \approx \vartheta$*. Er is gevraagd* $\rho, vandaar\ \rho a = m$

e. Bereken hiervoor I_e *als* $\int_0^a x^2\, \rho dx = \frac{1}{3}\rho a^3 = \frac{1}{3}\, ma^2$*. Dan wordt* $\omega_0 = \sqrt{\frac{3\,\rho a^2 g}{2\,\rho\, a^2}} = \sqrt{\frac{3\,g}{2\,a}}$

f. $\vartheta(t) = \vartheta_0 \cos \omega_0 t$ *. Haal de energie uit de maximale kinetische energie, gegeven door* $E_k = \frac{1}{2} I\omega^2$ *.*
Eerst $\omega = \frac{d\vartheta}{dt} = -\theta_0\omega_0 \sin\omega_0 t$*, met max* $\theta_0\omega_0$ *, dan* $E_k = \frac{1}{2}\,\frac{1}{3} ma^2\, \theta_0^2\, \frac{3}{2}\,\frac{g}{a} = \frac{1}{4} mag\, \theta_0^2$ *. De dimensie is kg* m^2/s^2 *, dat klopt met* $E_k = J = Nm$

Opgave 4. (roterende assenstelsels, 2+2+3+2+3 = 12)
Voor deze opgave staat onderaan de bekende formule voor de bewegingsvergelijking in een niet-inertiaalsysteem als geheugensteuntje.

Een wandelaar met massa *m* staat op een schijf met straal *b* die draait met een hoeksnelheid ω_0 om een as door het centrum. Van boven gezien draait de schijf tegen de klok in. De wandelaar loopt met een snelheid *v* van de buitenrand in de richting van het centrum van de schijf. Op een bepaald moment is hij precies halverwege rand en centrum, we noemen dit punt A.

a. Geef het impulsmoment **L** van de wandelaar, zowel grootte als richting, in A.
b. Kies een assenstelsel op de as en meedraaiend met de schijf. Geef in een tekening aan, waar je x', y', z' liggen, waar de wandelaar zich in dit stelsel bevindt, en welke richting $\boldsymbol{\omega}$ heeft. Geef de waarde en richting van ***a'*** uit vergelijking (1).
c. Bereken alle echte en schijnkrachten die op de wandelaar werken in het gekozen assenstelsel, en zet deze in een tekening. Geef aan waar de echte kracht door wordt veroorzaakt.
d. Bekijk het probleem nu in een inertiaal frame en teken en bereken de kracht op de wandelaar als hij *stilstaat* in A. Geef een kwalitatieve reden waarom deze kracht verandert als de wandelaar radieel beweegt.
e. De wandelaar loopt nu vanuit A *tangentieel* verder, met snelheid *v*, en tegen de rotatie van de schijf in. Ga terug naar het draaiende assenstelsel van (c) en bepaal bij welke snelheid de kracht **F** gelijk is aan nul.

N.B. Voor dit geval heb je geleerd dat de wet van Newton, **F** = m**a**, die geldt in een inetiaalsysteem en waarbij **F** en **a** een echte kracht en versnelling zijn, vervangen moet worden door

$$\mathbf{F} - m\mathbf{A_0} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' - \mathrm{m}\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') = m\boldsymbol{a}' \quad (1)$$

met alle 'geaccentueerde' grootheden gemeten in het bewegende assenstelsel.

a. ***L** = I ω, maar hier beter = r ×mv, met r = b/2 en v = ω_0 r , zodat **L** = m $b^2\omega_0$ / 4. Richting 'omhoog'*
b. Laat de wandelaar langs de x' – as lopen. De snelheid v' is konstant dus a' = 0.
*c. Dit is voorbeeld 5.3.1, maar dan met v naar het centrum, dus langs –**i'** . De Corioliskracht is dan +2mωv' **j'** ; de centrifugale kracht is mω^2b/2 **i'** ; en de echte kracht = wrijvingskracht is de negatieve som.*
d. Erg eenvoudig, dat is alleen de centripetale kracht - mω^2b/2 . Deze kracht verandert omdat de positie verandert.
*e. De Corioliskracht staat nu volgens - ω × v' naar **binnen** , de centrifugaalkracht nog steeds naar buiten, met grootte mω^2b/2. Noem de hoeksnelheid van v' = ω_0 b/2 ,leidend tot een centripetale a'. Dan volgt F – m 2ωω_0 b/2 + mω^2b/2 + m ω_0^2 b/2 = 0 ; F = m b/2 $(\omega-\omega_0)^2$; en dus = 0 als ω = ω_0. Het argument 'bij ω = ω_0 staat de wandelaar stil in het bewegende assenstelsel en dus is F = 0' is ook goed gerekend.*

--- EINDE ---