Tentamen Klassieke Mechanica a , 12 juni 2015 , 14u00 – 17u00

Let op – lees onderstaande goed door!

Het tentamen bestaat uit **4** opgaven, onder de laatste staat 'Einde'. Het totaal aantal te behalen punten is 46, het aantal voor de individuele onderdelen is aangegeven. Er mag geen elektronische apparatuur gebruikt worden. Noteer het antwoord op meerkeuze vragen als *letter + antwoord* op je uitwerkingsblad, en *niet* op het opgaveblad.

- Maak iedere opgave op een **apart blad**, omdat opgaven ieder apart worden nagekeken.
- Schrijf op ieder blad je **naam** en **studentnummer**.
- Alle **telefoons** moeten **uit** staan, in je **tas/jas** zitten, en mogen tijdens het tentamen niet tevoorschijn worden gehaald.
- Schrijf duidelijk en werk overzichtelijk. Kladpapier wordt niet nagekeken.
- Denk aan *interpret* / *develop (a plan) / evaluate / assess*
- Bij constatering van **fraude** wordt de student van verdere deelname aan het tentamen uitgesloten. Dit zal tevens aan de examencommissie worden doorgegeven.
- Denk aan de enquête. Denk ook aan commentaar op de leesquizzen uit het begin.

VEEL SUCCES!

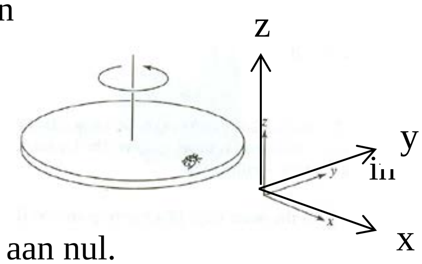
Opgave 1. (divers. 6 x 2 = 12) Kies telkens het beste antwoord.

(1) Je staat op een hoge rots en gooit een bal met een snelheid *v omhoog*, en een andere met een snelheid *v omlaag*. Verwaarloos luchtweerstand en geef aan welke bal met de grootste snelheid de grond raakt :
(a) de omhoog gegooide bal; (b) de naar beneden gegooide bal; (c) ze hebben dezelfde snelheid.

(2) Twee karretje met massa *m* en 2*m* staan op wrijvingsloze rails. Je duwt na elkaar beide karretjes gedurende een tijd *t* met dezelfde kracht. Is de kinetische energie van de lichte kar (massa *m)*:
(a) groter dan ; (b) gelijk aan ; (c) kleiner dan de kinetische energie van de zware kar ?

(3) Een steen wordt omhoog gegooid in de aanwezigheid van zwaartekracht en luchtwrijving. Geef aan of de tijd om maximale hoogte te bereiken
(a) groter is dan ; (b) gelijk is aan ; (c) kleiner is dan
de tijd om vanaf maximale hoogte weer bij het startpunt te komen

(4) Beschouw een steen op een draaiende schijf met assen zoals hiernaast getekend. De schijf vertraagt. Geef de richting van de *tangentiële* component van de versnelling van de steen gezien in het inertiaalsysteem van een vast assenstelsel. Is die
(a) langs +x ; (b) langs –x ; (c) langs +y ; (d) langs –y ; (e) gelijk aan nul.



(5) Een schaatser tolt om zijn (haar) as met uitgestrekte armen. Bij het intrekken van de armen wordt het traagheidsmoment *I* kleiner en de hoeksnelheid ω groter omdat het impulsmoment behouden is. Vergelijk de rotationele kinetische energie K_{rot} in de eindtoestand met die in de begintoestand : in de eindtoestand is K_{rot} :
(a) gelijk aan ; (b) groter dan ; (c) kleiner dan K_{rot} in de begintoestand.

(6) Een deeltje beweegt in een rechte lijn, in een Cartesisch stelsel beschreven door x = b, y = 0, z = ct, met b en c constanten en t de tijd. Heeft dit deeltje een impulsmoment **L**?
(a) ja, en **L** is constant ; (b) nee, door de rechtlijnige beweging ; (c) ja, en **L** verandert met de tijd.

Opgave 2. (beweging met wrijving; (2+1+3+2+2 = 10)
Een waterdruppel met massa m begint te vallen onder invloed van zwaartekracht (versnelling g) met beginsnelheid 0 op een positie z_0. Er werkt nog geen wrijving.

a. Geef de energievergelijking en stel daarmee een uitdrukking op voor de snelheid v op positie z.
b. Op positie z_0 / 2 wordt de tijd t = 0 gezet en begint een lineaire wrijvingskracht te werken (van het type $c_1 v$). Geef de dimensie van c_1 in S.I. eenheden.
c. Schrijf de bewegingsvergelijking op in termen van de snelheid v , waarbij de richting naar beneden als positief genomen wordt, en geef de volledige uitdrukking voor de snelheid als functie van de tijd, waarin z_0 verwerkt is. Laat zien dat de eindsnelheid v_t (de ‘terminal velocity’) gegeven wordt door $v_t = (mg)/c_1$.
d. Definieer een ‘karakteristieke tijd’ τ in termen van de diverse gegevens en geef een uitdrukking voor v als functie van (alleen) v_0 , v_t , en τ. Geef voor het geval dat $v_0 = 0$ een ruwe schatting (zonder rekenmachine) van het procentuele verschil tussen v en v_t op t = 3 τ.
e. Op t = 3 τ breekt de druppel in twee gelijke delen die beiden langs de z-as verder vallen. De waarde van c_1 blijft hetzelfde. Geef een complete schets van het gedrag van de snelheid v / v_t (op de y-as) als functie van t / τ (op de x-as), vanaf t = 0; eerst van de hele druppel, gevolgd door een halve (ze doen beiden hetzelfde) . Zet getallen langs assen.

Opgave 3. (deeltjes en slingers, 2+1+2+2+3+2 = 12)

Beschouw een verzameling deeltjes met massa’s m_i en posities $\boldsymbol{r}_\mathbf{i}$. De som van alle massa’s is m.
a. Geef de definite voor de positie $\boldsymbol{r}_\mathbf{cm}$ van het massacentrum van het systeem en gebruik deze om te laten zien dat de impuls $\boldsymbol{p}$ van het systeem gegeven wordt door $\boldsymbol{p} = m\, \boldsymbol{v}_\mathbf{cm}$.

Als er externe krachten $\mathbf{F_i}$ werken op alle deeltjes i, en interne krachten $\mathbf{F_{ij}}$ tussen alle deeltjes i en j, laat kun je laten zien dat $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i$ = m $\mathbf{a_{cm}}$ met $\mathbf{a_{cm}}$ de versnelling van het massazwaartepunt.
b. Geef in woorden aan welke van de wetten van Newton gebruikt is, en hoe, om tot dit resultaat te komen.
c. Beschouw nu een dunne staaf met een massadichtheid ρ [kg / m] en een lengte a, opgehangen aan een as door zijn massamiddelpunt. Geef in een diagram aan welke krachten er werken, met hun aangrijpingspunt, in termen van de externe somkracht $\mathbf{F}$. Geef ook aan welke posities van de staaf (varierend van verticaal tot horizontaal) je beschouwt als evenwichtsposities.
d. De staaf wordt aan een uiteinde opgehangen. We noemen hem nu slinger. Maak een schets van de slinger met een kleine uitwijking uit de verticale evenwichtsstand, gegeven door een hoek ϑ, waarin kracht, richting, en aangrijpingspunt staan. Laat zien dat de bewegingsvergelijking die van een harmonische oscillator is, in termen van ρ, g, a, ϑ en het traagheidsmoment I_e van de staaf rond een as door het ophangpunt (het uiteinde).
e. Laat zien dat de hoekfrequentie van de slinger gegeven wordt door $\omega_0 = \sqrt{(3g)/(2a)}$.
f. De kleine uitwijking die de slinger krijgt op t = 0 is ϑ_0. Geef de oplossing van de bewegings-vergelijking voor $\vartheta(t)$, en bereken hiermee de energie E die gemiddeld in een slingering aanwezig is in termen van ρ, ϑ_0, g, en a. Laat zien dat de dimensie van je antwoord inderdaad energie is.

Opgave 4. (roterende assenstelsels, 2+2+3+2+3 = 12)
Voor deze opgave staat onderaan de bekende formule voor de bewegingsvergelijking in een niet-inertiaalsysteem als geheugensteuntje.

Een wandelaar met massa *m* staat op een schijf met straal *b* die draait met een hoeksnelheid ω_0 om een as door het centrum. Van boven gezien draait de schijf tegen de klok in. De wandelaar loopt met een snelheid *v* van de buitenrand in de richting van het centrum van de schijf. Op een bepaald moment is hij precies halverwege rand en centrum, we noemen dit punt A.

a. Geef het impulsmoment **L** van de wandelaar, zowel grootte als richting, in A.
b. Kies een assenstelsel op de as en meedraaiend met de schijf. Geef in een tekening aan waar je x', y', z' liggen, waar de wandelaar zich in dit stelsel bevindt, en welke richting **ω** heeft. Geef de waarde en richting van ***a'*** uit vergelijking (1).
c. Bereken alle echte en schijnkrachten die op de wandelaar werken in het gekozen assenstelsel, en zet deze in een tekening. Geef aan waar de echte kracht door wordt veroorzaakt.
d. Bekijk het probleem nu in een inertiaal frame en teken en bereken de kracht op de wandelaar als hij *stilstaat* in A. Geef een kwalitatieve reden waarom deze kracht verandert als de wandelaar radieel beweegt.
e. De wandelaar loopt nu vanuit A *tangentieel* verder, met snelheid *v*, en tegen de rotatie van de schijf in. Ga terug naar het draaiende assenstelsel van (c) en bepaal bij welke snelheid de kracht **F** gelijk is aan nul.

N.B. Voor dit geval heb je geleerd dat de wet van Newton, **F** = m**a**, die geldt in een inertiaalsysteem en waarbij **F** en **a** een echte kracht en versnelling zijn, vervangen moet worden door

$$\mathbf{F} - m\mathbf{A_0} - 2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}' - \mathrm{m}\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}' - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}') = m\boldsymbol{a}' \quad (1)$$

met alle ‘geaccentueerde’ grootheden gemeten in het bewegende assenstelsel.

--- EINDE ---