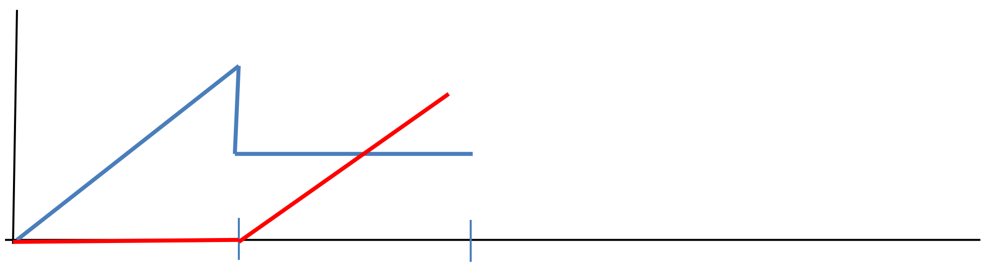
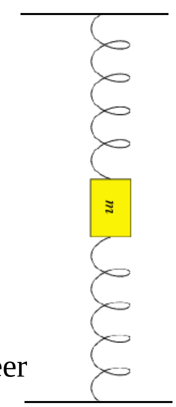
Klassieke Mechanica a ; toets 27 maart 2015 ; 9u00 – 10u45

Zet je naam + studentnummer rechtsboven op elke pagina en nummer de pagina’s. De toets bestaat uit **4** opgaven. Het totaal aantal te behalen punten is 37, het aantal voor de individuele onderdelen is aangegeven. Er mag geen elektronische apparatuur gebruikt worden. Noteer het antwoord op multiple choice vragen als *letter* + *antwoord* op je uitwerkingsblad, en niet op het opgaveblad.

Opgave 1. (divers. 2+1+1+3+3 = 10)

(i) Over statische en dynamische wrijving Aan een stilstaand blok op een horizontaal vlak wordt getrokken met een horizontale kracht F die lineair toeneemt in de tijd. Schets het gedrag van de wrijvingskracht f_w als functie van de tijd tot een tijd 2 t_0; hier is t_0 de tijd waarop het blok in beweging komt. Schets ook het gedrag van de versnelling als functie van de tijd.





Hiernaast is een blok getekend met massa *m*. Het blok is aan twee veren bevestigd met gelijke veerkonstantes *k* die vastzitten aan bodem en plafond. De afstand bodem-plafond is L, de zwaartekracht werkt naar beneden

(ii) Verwacht je voor de evenwichtspositie van het blok dat die
- (a) boven L/2 ligt
- (b) op L/2 ligt
- (c) onder L/2 ligt

onder L / 2

(iii) Zonder de onderste veer heeft het systeem een eigenfrequentie ω_0 . Met de onderste veer wordt de eigenfrequentie

a. 2x groter
b. √2 maal groter
c. 2x kleiner
d. √2 maal kleiner

ω_0 wordt √((k+k) / m) , dus √2 maal groter

(iv) Op een deeltje met massa *m* werkt een kracht van de vorm F = -*k*x + *c*/x met k, c constantes en x>0. Geef de potentiële energie functie V(x) en bepaal de evenwichtspositie van dit systeem.

V uit F = –dV/dx wordt $\frac{1}{2}kx^2 - c\ ln(x)$; evenwicht voor F=0 dus $x_0^2 = c / k$

(v) Reken voor hetzelfde systeem de frequentie rond evenwicht uit *voor kleine uitwijkingen.*

Mogelijk wat lastiger. Ik doe het als volgt. Maak $x = x_0 + \varepsilon$*, zodat de terugdrijvende kracht wordt* $-k\,x_0 - k\varepsilon + c / [x_0 (1+ \varepsilon / x_0)]$*. Ontwikkelen levert* $-k\,x_0 + c / x_0$ en dat is nul, plus $- k\varepsilon - c\varepsilon / x_0^2$ *, en* $c / x_0^2 = k$ *; dus er staan* $2k\varepsilon$ *en de hoekfrequentie is* $\sqrt{(2k / m)}$*.*

Opgave 2. (beweging met wrijving; (3+4+3 =10)

Een blok met massa m beweegt op tijd $t = 0$ en positie x_0 met een beginsnelheid v_0 over een wrijvingsloos oppervlak. Er werkt een luchtwrijving $c\,v^2$ (kwadratisch in de snelheid).

a. Schrijf de bewegingsvergelijking op in termen van de snelheid v en laat zien dat hieruit volgt $v = v_0 \;/ (1 + k\,\mathrm{t})$, met $k = (cv_0 / m)$.

Dit is precies het boek, voorbeeld 2.4.2. De vgl in v wordt $-c\,v^2 = m\,dv/dt$*, dus voor v separeren en* $v = v_0 / (1+ kt)$ *met* $k = c\,v_0 / m$

b. Bereken vervolgens de positie x(t). Laat zien dat je antwoord voor $t = 0$ corrects is.

Weer integreren levert $x(t) = (v_0 / k) \ln(1+kt) +x_0$ *;* $x(0) = x_0$

c. Nu valt hetzelfde blok onder invloed van de zwaartekracht naar beneden, opnieuw met kwadratische luchtwrijving $-c\,v^2$. Bereken de eindsnelheid (de ‘terminal velocity’) in termen van m, g, en c.

Hier hoef je alleen maar te bedenken dat nu de bewegingsvergelijking is $mg - c\,v^2 = m\,dv/dt$ *, positieve richting naar beneden, en* $dv / dt = 0$*, zodat* $v = \sqrt{[(mg) / c]}$

Opgave 3. (harmonische oscillator, 4+2+4 = 10)

Beschouw een slinger met een massa m aan een massaloos koord van lengte L als een gedempte harmonische oscillator (kleine uitwijking) met een wrijvingskracht evenredig is met de snelheid ($F_w = c\,v$). Zonder aandrijving wordt de uitwijking gegeven door $y(t) = A\exp(-\gamma t) \cos(\omega_0\,t)$, met $\gamma \ll \omega_0$ en $\omega_0^2 = g / L$.

a. Geef een uitdrukking voor de energie E die gemiddeld in een slingering aanwezig is in termen van m, A, γ en ω_0 onder die aanname $\gamma \ll \omega_0$.

Die wordt (bijvoorbeeld) gegeven door de maximale $\frac{1}{2}mv^2$ *.*
Schrijf $v^2 = (-A\gamma \exp(-\gamma t) \cos(\omega_0\,t) - A \exp(-\gamma t)\,\omega_0 \sin(\omega_0\,t))^2$ *, verwaarloos de term met* γ *(of verwaarloos* γ^2 *en zie dat sin x cos x naar nul middelt). Dan* $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} A^2 m\,\omega_0^2 \exp(-2\gamma t) \cos^2(\omega_0\,t)$*. De maximum waarde is* $\frac{1}{2} A^2 m\,\omega_0^2 \exp(-2\gamma t)$*.*

b. De kwaliteitsfactor $Q \approx \omega_0 / 2\,\gamma$. Geef de dimensie van Q.

ω_0 *en* γ *hebben dezlefde dimensie, dus [Q] = [1]*

c. De tijd t kan ook geschreven worden als ηT_0, met T_0 een volle slingertijd en η een reeël getal. Gebruik dit om γt te schrijven in termen van Q en η. Maak (zonder je niet-aanwezige rekenmachine; en met ln(2) = 0.69) een ruwe schatting van Q als de uitwijking $y(t)$ na 5 volledige slingeringen is gehalveerd

$T = \eta T_0 = 2\pi\eta / \omega_0$ zodat $\exp(-\gamma t) = \exp(-\gamma\, 2\pi\eta / \omega_0) = \exp(-\pi\eta / Q)$. 5 slingeringen betekent $\eta = 5$, en de amplitude is gehalveerd, zodat $\ln(½) = -5\pi / Q$. Dan is $Q = 15.7 / 0.7 = 22.4$

Opgave 4. (conservatieve kracht, 3+4 = 7)

Beschouwen een krachtenveld van de vorm $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -a(2x - y)\mathbf{i} + a(x - 2y)\mathbf{j} + b\mathbf{k}$ met de gebruikelijke notatie $\mathbf{r} = (x; y; z)$.

a. Laat zien dat dit krachtenveld conservatief is.

$(\nabla \times \mathbf{F})_x = \partial F_z/\partial y - \partial F_y/\partial z = 0 - 0 = 0,$
$(\nabla \times \mathbf{F})_y = \partial F_x/\partial z - \partial F_z/\partial x = 0 - 0 = 0,$
$(\nabla \times \mathbf{F})_z = \partial F_y/\partial x - \partial F_x/\partial y = a - a = 0$

b. Bepaal het potentiaalverschil $V(\mathbf{r}) - V(\mathbf{0})$, als volgt: Bedenk dat het potentiaalverschil onafhankelijk is van het gekozen pad, en kies een slim pad om naar $\mathbf{r} = (x; y; z)$ te komen

*Het bijbehorende potentiaal potentiaalverschil $V(r) - V(0) = \int_0^r F(r') \cdot r'$ lossen we op door het pad vanuit de oorsprong naar positie **r** op te delen in drie integraties.*

- Integratie van (0, 0, 0) naar (x, 0, 0) geeft $-\int_0^x F_x dx' = -\int_0^x 2ax'dx' = ax^2 \int x$.

- Integratie van (x, 0, 0) naar (x, y, 0) geeft $-\int_0^y F_y dy' = -\int_0^y a(-x + 2y')dy' = a(-xy + y^2)$.

- Integratie van (x, y, 0) naar (x, y, z) geeft $-\int_0^{yz} F_z dz = -\int_0^z b\, dz' = -bz$.

Combinatie van deze drie integralen geeft:

$V(\mathbf{r}) - V(\mathbf{0}) = a(x^2 - xy + y^2) - bz = a(x + y)^2/4 + 3a(x - y)^2/4 - bz$