

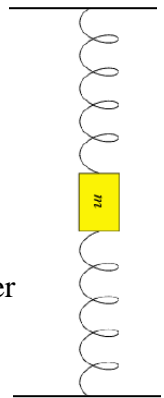
## Klassieke Mechanica a ; toets 27 maart 2015 ; 9u00 – 10u45

Zet je naam + studentnummer rechtsboven op elke pagina en nummer de pagina's. De toets bestaat uit 4 opgaven. Het totaal aantal te behalen punten is 37, het aantal voor de individuele onderdelen is aangegeven. Er mag geen elektronische apparatuur gebruikt worden. Noteer het antwoord op multiple choice vragen als *letter* + *antwoord* op je uitwerkingsblad, en *niet* op het opgaveblad.

### Opgave 1. (divers. 2+1+1+3+3 = 10)

- (i) Over statische en dynamische wrijving Aan een stilstaand blok op een horizontaal vlak wordt getrokken met een horizontale kracht  $F$  die lineair toeneemt in de tijd. Schets het gedrag van de wrijvingskracht  $f_w$  als functie van de tijd tot een tijd  $2 t_0$ ; hier is  $t_0$  de tijd waarop het blok in beweging komt. Schets ook het gedrag van de versnelling als functie van de tijd.

Hiernaast is een blok getekend met massa  $m$ . Het blok is aan twee veren bevestigd met gelijke veerconstantes  $k$  die vastzitten aan bodem en plafond. De afstand bodem-plafond is  $L$ , de zwaartekracht werkt naar beneden



- (ii) Verwacht je voor de evenwichtspositie van het blok dat die
- (a) boven  $L/2$  ligt
  - (b) op  $L/2$  ligt
  - (c) onder  $L/2$  ligt
- (iii) Zonder de onderste veer heeft het systeem een eigenfrequentie  $\omega_0$ . Met de onderste veer wordt de eigenfrequentie
- a. 2x groter
  - b.  $\sqrt{2}$  maal groter
  - c. 2x kleiner
  - d.  $\sqrt{2}$  maal kleiner
- (iv) Op een deeltje met massa  $m$  werkt een kracht van de vorm  $F = -kx + c/x$  met  $k, c$  constantes en  $x > 0$ . Geef de potentiële energie functie  $V(x)$  en bepaal de evenwichtspositie van dit systeem.
- (v) Reken voor hetzelfde systeem de frequentie rond evenwicht uit voor *kleine uitwijkingen*.

### Opgave 2. (beweging met wrijving; (3+4+3 =10)

Een blok met massa  $m$  beweegt op tijd  $t = 0$  en positie  $x_0$  met een beginsnelheid  $v_0$  over een wrijvingsloos oppervlak. Er werkt een luchtwrijving  $c v^2$  (kwadratisch in de snelheid).

- a. Schrijf de bewegingsvergelijking op in termen van de snelheid  $v$  en laat zien dat hieruit volgt  $v = v_0 / (1 + k t)$ , met  $k = (c v_0 / m)$ .
- b. Bereken vervolgens de positie  $x(t)$ . Laat zien dat je antwoord voor  $t = 0$  corrects is.
- c. Nu valt hetzelfde blok onder invloed van de zwaartekracht naar beneden, opnieuw met kwadratische luchtwrijving  $-c v^2$ . Bereken de eindsnelheid ( de 'terminal velocity') in termen van  $m, g$ , en  $c$ .

**Opgave 3. (harmonische oscillator, 4+2+4 = 10)**

Beschouw een slinger met een massa  $m$  aan een massaloos koord van lengte  $L$  als een gedempte harmonische oscillator (kleine uitwijking) met een wrijvingskracht evenredig is met de snelheid ( $F_w = c v$ ). Zonder aandrijving wordt de uitwijking gegeven door  $y(t) = A \exp(-\gamma t) \cos(\omega_0 t)$ , met  $\gamma \ll \omega_0$  en  $\omega_0^2 = g/L$ .

- Geef een uitdrukking voor de energie  $E$  die gemiddeld in een slingering aanwezig is in termen van  $m$ ,  $A$ ,  $\gamma$  en  $\omega_0$  onder die aanname  $\gamma \ll \omega_0$ .
- De kwaliteitsfactor  $Q \approx \omega_0 / 2 \gamma$ . Geef de dimensie van  $Q$ .
- De tijd  $t$  kan ook geschreven worden als  $\eta T_0$ , met  $T_0$  een volle slingertijd en  $\eta$  een reeel getal. Gebruik dit om  $\gamma t$  te schrijven in termen van  $Q$  en  $\eta$ . Maak (zonder je niet-aanwezige rekenmachine; en met  $\ln(2) = 0.69$ ) een ruwe schatting van  $Q$  als de uitwijking  $y(t)$  na 5 volledige slingeringen is gehalveerd

**Opgave 4. (conservatieve kracht, 3+4 = 7)**

Beschouwen een krachtenveld van de vorm  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -a(2x - y)\mathbf{i} + a(x - 2y)\mathbf{j} + b\mathbf{k}$  met de gebruikelijke notatie  $\mathbf{r} = (x; y; z)$ .

- Laat zien dat dit krachtenveld conservatief is.
- Bepaal het potentiaalverschil  $V(\mathbf{r}) - V(\mathbf{0})$ , als volgt: Bedenk dat het potentiaalverschil onafhankelijk is van het gekozen pad, en kies een slim pad om naar  $\mathbf{r} = (x; y; z)$  te komen