Klassieke Mechanica a ; toets 18 maart 2016 ; 9u00 – 10u45

Zet je naam + studentnummer rechtsboven op elke pagina en nummer de pagina's. De toets bestaat uit **4** opgaven. Het totaal aantal te behalen punten is 32, het aantal voor de individuele onderdelen is aangegeven. Er mag geen elektronische apparatuur gebruikt worden. Noteer het antwoord op multiple choice vragen als *letter + antwoord* op je uitwerkingsblad EN geef steeds een korte verklaring van je antwoord.

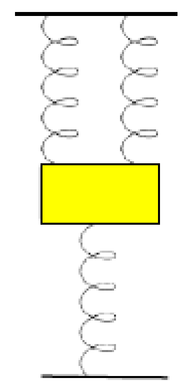
Opgave 1. (divers. 1+1+2+3+3 = 10)

(i) Een bal wordt door een veer loodrecht omhoog geschoten en bereikt een hoogte van 24 meter. Bij een tweede experiment wordt de veer maar half zo diep ingedrukt, en de bal wordt weer omhoog geschoten. De bal bereikt nu een hoogte van

1. 96 m	2. 48 m	3. 24 m
4. 12 m	5. 6 m	6. 3 m

Antwoord 5 : 6m. De energie is ¼.

Hiernaast is een blok getekend met massa *m*. Het blok is aan drie veren bevestigd aan bodem en plafond zoals afgebeeld. De bovenste twee hebben veerkonstantes k_1, de onderste veer heeft veerkonstante $2k_1$. De afstand bodem-plafond is L, de zwaartekracht werkt naar beneden



(ii) Verwacht je voor de evenwichtspositie van het blok dat die
- (a) boven L/2 ligt
- (b) op L/2 ligt
- (c) onder L/2 ligt

Antwoord (c) onder L/2. De drie veren samen heffen mg op.

(iii) Wanneer het blok aan één veer met veerkonstante k_1 wordt opgehangen heeft het systeem een eigenfrequentie ω_0 . Opgehangen met drie veren zoals hierboven beschreven wordt de eigenfrequentie

a. 2 maal groter	b. 3 maal groter	c. 4 maal groter
c. 2 maal kleiner	d. 3 maal kleiner	e. 4 maal kleiner
f. de eigenfrequentie verandert niet		

Antwoord (a) 2x groter. De effectieve veerkonstante is $4k_1$

(iv) Een blok met massa *m* beweegt met beginsnelheid v_0 op t = 0 over een horizontaal wrijvingsloos oppervlak. De luchtwrijving is c_1v^2. Schrijf een differentiaalvergelijking op voor de snelheid *v* en geef de oplossing voor *v*.

$m\,dv/dt = -c_1v^2$ Scheiden van variabelen en integreren levert $-1/v + 1/v_0 = -c_1/m\ t$, ofwel

$$v = v_0 \Big/ 1 + \frac{c_1}{m} t\, v_0$$

(v) Een bal met massa *m* wordt omhoog geschoten met snelheid v_0 Er werkt zwaartekracht *m*g naar beneden, geen luchtwrijving. Schrijf de energievergelijking op en bereken de maximale hoogte *h* van de bal boven het beginpunt in termen van de gegeven constanten.

$E = T_0 + V_0 = T + V \quad 1/2m\, v_0^2 = mgh \qquad h = v_0^2/ 2g$

Opgave 2. (beweging; (2+2+3=7)

Gegeven is een potentiële energie $V(x) = V_0 - \frac{1}{2}k\delta^2 e^{-x^2/\delta^2}$, met V_0, k, δ constanten en x de plaatscoördinaat.

a. Bereken de kracht F(x).

$F = -dV/dx = -\frac{-1}{2}k\delta^2\, e^{-x^2/\delta^2}\, \frac{-2x}{\delta} = -kx\, e^{x^2/\delta^2}.$

b. Laat voor kleine uitwijkingen ε rond de evenwichtspositie zien dat de potentiële energie die van een harmonische oscillator (H.O.) is. Geef de eigenfrequentie van deze oscillator.

x klein : $= -kx\,(1 - x^2 / \delta^2) \approx -kx$; *eigenfrequentie* $\omega_0 = \sqrt{(k/m)}$

c. Een deeltje met massa m heeft in de oorsprong een snelheid v_0. Behandel het als een H.O. en bereken v(ε) en de maximale uitwijking A.

$T_0 + V_0 = T + V$; $1/2mv_0^2 + V_0 - 1/2k\delta^2 = 1/2mv^2 + V_0 - 1/2k\delta^2\,(1 - \varepsilon^2/\delta^2)$ *levert* $v = \sqrt{v_0^2 - \frac{k}{m}\,\varepsilon^2}$

Opgave 3. (harmonische oscillator, 2+3+3+2 = 9)

Beschouw een een gedempte harmonische oscillator die bestaat uit een mass *m* aan een veer met veerkonstante *k*, en een wrijvingskracht evenredig is met de snelheid ($F_w = c\, v$).

a. Laat zien dat de differentiaalvergelijking geschreven kan worden als $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

$$m\ddot{x} = -kx - cv \quad ; \quad \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad ; \quad \frac{c}{m} = 2\gamma \;, \frac{k}{m} = \omega_0^2$$

b. Laat zien dat x(t) = A$e^{-\gamma t}\cos(\omega_d t)$ een oplossing is en bepaal daarmee ω_d.

$$\dot{x} = -A\gamma e^{-\gamma t}\cos(\omega_d t) - Ae^{-\gamma t}\sin(\omega_d t)$$

$\ddot{x} = e^{-\gamma t}(A\gamma^2\, \cos(\omega_d t) + A\omega_d\gamma\, \sin(\omega_d t) + A\omega_d\gamma\, \sin(\omega_d t) - A\omega_d^2\, \cos(\omega_d t)$

Doorrekenen laat zien dat het een oplossing is met $\omega_d^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$

c. Zonder demping is de meest algemene oplossing $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$. Geef uitdrukkingen voor A en φ_0 als op t = 0 de uitwijking x_0 is en de snelheid v_0.

$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, $t=0$, $x_0 = A \cos(\varphi_0)$
$v = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$, $t=0$, $v_0 = -A\omega_0 \sin(\varphi_0)$ $\quad tg(\varphi_0) = -v_0 / (\omega_0 x_0)$ $\quad A^2 = x_0^2 + (v_0 / \omega_0)^2$

d. Geef voor de oscillator met demping een uitdrukking voor de momentane energieverandering per tijdseenheid d*E/dt*. Geef ook een uitdrukking voor de gemiddelde energieverandering gedurende een (willekeurige) periode in termen van d*E/dt*.

$$\frac{dE}{dt} = -c\dot{x}^2 \quad ; \quad \Delta E = \int_0^{T_d} \left(\frac{dE}{dt}\right) dt$$

Opgave 4. (conservatieve kracht, 3+3 = 6)
Beschouwen een krachtenveld van de vorm $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -a(2x - y)\mathbf{i} + a(x - 2y)\mathbf{j} + b\mathbf{k}$ met de gebruikelijke notatie $\mathbf{r} = (x; y; z)$. Het veld is conservatief.

a. Bepaal het potentiaalverschil $V(\mathbf{r}) - V(\mathbf{0})$.

kies pad (0,0,0) - (x,0,0) - (x,y,0) - (x,y,z)

1) *wordt dan ax^2*
2) *wordt $-a(xy - y^2)$*
3) *wordt $-bz$*

b. In een gravitatieveld hangt de kracht alleen af van de afstand r tot het centrum, $F = c/r^2$ en gericht naar de oorsprong. Vind twee verschillende paden waarlangs geldt dat $\oint F \cdot d\ell = 0$.

Eeen volledige cirkel is zo'n pad ; of (een cirkelsegment) – (langs de straal naar buiten) – cirkelsegment andersom) – langs de straal naar binnen. Langs de straal naar buiten / binnen zijn delen van het pad die elkaar opheffen, de cirkelsegmenten doen niet mee omdat $F \perp \ell$.