Klassieke Mechanica a
(Hertentamen 9 augustus 2011)

Uitwerkingen

Opgave 1. (Newton's appel & maan)

a. De zwaartekracht die de aarde op de maan uitoefent, $F_{zw} = M_m g(Ra/R_{a-m})^2$, moet in balans zijn met de centripetaalkracht $F_c = M_m \omega^2 R_{a-m}$ die de maan nodig heeft om rondjes te draaien. Combineren geeft:

$$\omega^2 = g R_a^2 / R_{a-m}^3$$

b. Invullen van $g = 9.83$ m/s^2, $R_a = 6.38 \times 10^6$ m en $R_{a-m} = 3.84 \times 10^8$ m geeft $\omega = 2.66 \times 10^{-6}$ s^{-1} en $T = 2\pi/\omega = 2.36 \times 10^6$ s $= 27.4$ dagen. De gemeten omlooptijd is 27.3 dagen.

Opgave 2. (Wet van Buys Ballot)

a. De wet van Buys-Ballot wordt veroorzaakt door de Corriolis kracht $\vec{F} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$. Deze inertiaalkracht is voelbaar in een assenstelsel dat vastzit aan de draaiende aarde. Als we de z-richting omhoog kiezen en de y-richting naar de noordpool laten wijzen, met de x-richting naar het oosten, dan is $\vec{\omega} = \omega(0, \cos\lambda, \sin\lambda)$ op breedtegraad λ en $\vec{v} = (v_x, v_y, 0)$ voor beweging in het vlak. De horizontale component van de Corriolis kracht $\vec{F} = 2m\omega(\sin\lambda v_y, -\sin\lambda v_x, \cos\lambda v_x)$ staat loodrecht op $\vec{v}$ en geeft een bewegende massa een "afwijking naar rechts".

b. De sterkte van de kracht parallel aan het oppervlak van de aarde is $|(F_x, F_y, 0)| = 2m\omega \sin\lambda |\vec{v}|$.

Opgave 3. (Ronddraaiend blokje op tafel)

a. Voor het onderste blok geldt: $-M\ddot{r} = Mg - F_{\text{span}}$.
Voor het ronddraaiende blok geldt: $m\ddot{r} = m\omega^2 r - F_{\text{span}}$.
Eliminatie van de spankracht F_{span} geeft het gevraagde resultaat:

$$(M+m)\ddot{r} = -Mg + m\omega^2 r = -Mg + \frac{L^2}{mr^3},$$

met draaiimpuls $L = m\omega r^2$.

Opgave 4. (Leeggieten pak suiker)

a. Het stoppen van de neervallende suiker geeft een terugstoot kracht

$$F_{\text{terugstoot}} = \frac{dp}{dt} = v_e \frac{dm}{dt},$$

en een extra massa aflezing $\Delta m = F_{\text{terugstoot}}/g$. De valsnelheid v_e van de suiker op de weegschaal volgt uit energiebehoud $\frac{1}{2}mv_e^2 = mgh$, zodat $v_e = \sqrt{2gh}$. Invullen geeft

$$\Delta m = \sqrt{\frac{2h}{g}} \left(\frac{dm}{dt}\right).$$

b. De massa van de suiker die nog onderweg is, is $\Delta m_{\text{onderweg}} = \frac{dm}{dt} t_{\text{val}}$. De valtijd t_{val} volgt uit $\frac{1}{2}gt_{\text{val}}^2 = h$, zodat $t_{\text{val}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Invullen levert het gevraagde verband $\Delta m_{\text{onderweg}} = \Delta m$.

Opgave 5. (Morse potentiaal tussen twee atomen)

a. Energiebehoud voor beweging onder invloed van een conservatieve kracht (want beschreven door een potentiaal) zorgt ervoor dat de combinatie $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + U(r)$ constant is, waarbij v_i de snelheid van deeltje i in het zwaartepuntsstelsel is. Ook geldt dat $m_1v_1 = m_2v_2$ en $v = v_1+v_2$, want de deeltje bewegen altijd in tegenovergestelde richtingen in het zwaartepuntsstelsel. Omschrijven geeft $v_1 = vm_2/(m_1+m_2)$, $v_2 = vm_1/(m_1+m_2)$, en $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}\mu v^2$.

b. Door de uitdrukking voor de totale energie te differentiëren naar R, met herhaald toepassen van de kettingregel, vinden we de bewegingsvergelijking

$$\mu\ddot{R} = -\frac{dU(R)}{dR} = 2V_0\left[1 - \exp\left(\frac{-(R-R_0)}{\Delta R}\right)\right]\exp\left(\frac{-(R-R_0)}{\Delta R}\right)\left[\frac{-1}{\Delta R}\right].$$

Na een Taylor expansie rond het evenwichtspunt met $(R-R_0) \ll \Delta R$ vereenvoudigt dit tot

$$\mu\ddot{R} \approx \frac{-2V_0(R-R_0)}{(\Delta R)^2}.$$

Vergelijking met de standaardvorm $\ddot{x} = -\omega^2 x$ voor een ongedempte harmonische oscillator geeft het gevraagde resultaat

$$\omega^2 = \frac{2V_0}{\mu(\Delta R)^2}.$$