Klassieke Mechanica a
(Hertentamen 9 augustus)

(Elke opgave s.v.p. met naam/studienummer op nieuwe pagina)

Opgave 1.
Volgens een anekdote lag Newton onder een appelboom toen hij bedacht dat het vallen van de appel veroorzaakt zou kunnen worden door dezelfde zwaartekracht die de maan in een stabiele baan rond de aarde laat draaien. Bij deze vraag herhalen we zijn berekening.

a. Bepaal de verwachte rotatiefrequentie ω van de maan als functie van de zwaartekrachtsversnelling g op aarde, de straal van de aarde R_a en de afstand aarde-maan R_{a-m}. Je mag voor het gemak de massa van de maan verwaarlozen ten opzichte van de massa van de aarde, d.w.z. je hoeft geen rekening te houden met de gereduceerde massa van het stelstel aarde-maan.

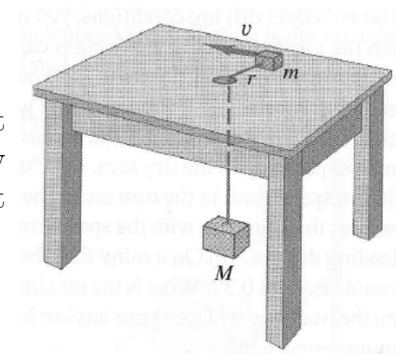
b. Bereken de oploopstijd van de maan op basis van de volgende gegevens: zwaartekrachtsversnelling op de polen $g = 9.83$ m/s^2; straal aarde $R_a = 6.38 \times 10^3$ km; gemiddelde afstand aarde-maan $R_{a-m} = 3.84 \times 10^5$ km.

Opgave 2.
De wet van Buys-Ballot stelt dat bewegingen (van lucht) op het noordelijk halfrond een afwijking naar rechts ondervinden.

a. Verklaar deze wet op basis van algemene principes uit de klassieke mechanica. Bediscussieer vooral ook de richtingen van de vectoren.

b. Hoe sterk is de inertiaalkracht die de wet van Buys-Ballot veroorzaakt, dus de kracht parallel aan het oppervlak van de aarde, voor een massa m die zich op een breedtegraad λ met een snelheid v langs het oppervlak beweegt? Gebruik het symbool ω voor de (hoek)frequentie van de aardrotatie.

Opgave 3.



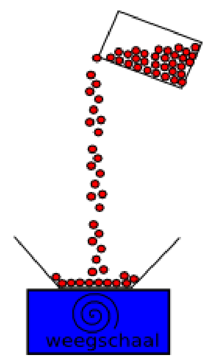
Beschouw de beweging van een blokje met massa m dat op een wrijvingsloze tafel rondjes draait en met een touw via een gat in de tafel bevestigt is met een blok met massa M dat onder de tafel hangt (zie figuur).

a. Toon aan dat de bewegingsvergelijking van de afstand r van het ronddraaiende blokje tot het gat gegeven wordt door

$$(M+m)\ddot{r} = -Mg + \frac{L^2}{mr^3} \, ,$$

met L het impulsmoment van het ronddraaiende blokje en g de zwaartekrachtsversnelling. Tip: Introduceer de spankracht $\mathbf{F}_{\text{span}}$ in het touw, die gelijktijdig probeert het hangende blokje op te tillen en het ronddraaiende blokje naar binnen te trekken, en begin met het opstellen van afzonderlijke bewegingsvergelijkingen voor elk van de twee massa's.

Opgave 4.



We gieten een pak suiker met een constant tempo leeg in een bak die op een gevoelige weegschaal staat (zie figuur). Het gewicht dat de weegschaal op tijdstip t aanwijst is gelijk aan de massa $m(t)$ die op dat moment op de weegschaal ligt plus een extra aflezing Δm ten gevolge van de terugslag van de neervallende suiker, waarvan we aannemen dat hij na landing meteen stil ligt.

a. Leidt een uitdrukking af voor de extra aflezing Δm als functie van van het uitstroomtempo dm/dt, de uitstrooihoogte h boven de weegschaal en de zwaartekrachtsversnelling g.

b. Toon aan dat de extra aflezing Δm precies gelijk is aan de massa van de suiker die "nog onderweg is vanaf het pak naar de weegschaal".

Opgave 5.
Twee atomen met massa's m_1 en m_2 zijn aan elkaar gebonden via een atomaire (Morse) potentiaal van de vorm

$$U(R) = V_0 \left[1 - \exp\left(\frac{-(R - R_0)}{\Delta R} \right) \right]^2 - V_0 \,,$$

waarbij R de onderlinge afstand tussen de atomen is, R_0 hun evenwichtsafstand, en ΔR en V_0 de breedte en diepte van de potentiaal. We beschouwen enkel de beweging van de atomen langs de verbindingsas, dus in de afwezigheid van rotatie.

a. Toon aan dat de kinetische energie in het zwaartepuntstelsel geschreven kan worden als $T = \frac{1}{2}\mu v^2$, waarbij $\mu \equiv m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ de gereduceerde massa is en $v \equiv dR/dt$ de onderlinge snelheid tussen de moleculen.

b. Toon aan dat de trillingsfrequentie van de vibratie (= periodieke verandering van de onderlinge afstand R) voor kleine bewegingen $(R - R_0) \ll \Delta R$ gegeven wordt door

$$\omega^2 = \frac{2V_0}{\mu(\Delta R)^2}.$$

Tip: schrijf de wet van behoud van energie eerst om naar een bewegingsvergelijking, door het nemen van een tijdsafgeleide, en voer een eerste-order Taylor expansie uit via $e^{-x} \approx 1 - x + ...$