Klassieke Mechanica a
(Tentamen 23 mei 2011)

Uitwerkingen

Opgave 1. (Twee knikkers in cirkelvormige banen))

a. De knikkers draaien om hun gemeenschappelijke zwaartepunt dat zich op een afstand $r_1 = Rm_2/(m_1 + m_2)$ van massa 1 en een afstand $r_2 = Rm_1/(m_1 + m_2)$ van massa 2 bevindt. De gevraagde omloopstijd volgt uit de balans tussen de zwaartekracht en de centrifugaalkracht, die voor massa 1 geschreven kan worden als

$$\frac{Gm_1m_2}{R^2} = m_1\omega^2 r_1 = \frac{m_1m_2\omega^2R}{(m_1 + m_2)}.$$

Hieruit volgt $\omega^2 = G(m_1+m_2)/R^3 \Rightarrow T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{R^3/[G(m_1 + m_2)]}$.

b. Invullen geeft $T = 1.40 \times 10^7$ s ≈ 0.45 jaar!

Opgave 2. (ijsblokje glijdt van bol)

a. De krachten die werken op het ijsblokje zijn de zwaartekracht (verticaal) en de normaalkracht (loodrecht op de bol). De projectie van de zwaartekracht in de tangentiële richting levert de gevraagde bewegingsvergelijking:

$$m\ddot{s} = mg\sin\theta = mg\sin(s/R).$$

b. Als het blokje stil zou staan dan zou de projectie van de zwaartekracht in de radiële richting precies gecompenseerd worden door de normaalkracht. Voor een bewegend blokje is de normaalkracht kleiner, omdat er een netto centripetaalkracht over moet blijven om het blokje langs zijn cirkelvormige baan te leiden. Het blokje vliegt van de bol af op het moment dat $m\omega^2R = mv^2/R = mgcos(\theta)$. Door combinatie met de wet van behoud van energie, $[\frac{1}{2}mv^2 = mgR(1 - \cos\theta)]$ voor een blokje dat rond $\theta \approx 0$ stil stond, vinden we als oplossing $\cos\theta = 2/3$, wat correspondeert met een hoek $\theta \approx 48.2°$.

c. Voor $s \ll R$ reduceert de bewegingsvergelijking tot
$\ddot{s} = g \sin(s/R) \approx (g/R)s$.
De oplossing hiervan voor een deeltje dat bij $s \approx 0$ stilstond is $s(t) \approx s_0 \exp(t\sqrt{g/R}) = s_0 \exp(t/\tau)$ met $\tau = \sqrt{R/g}$ als karakteristieke tijd.

Opgave 3. (Angry birds)

a. De beginsnelheid v_0 volgt uit energiebehoud. Door de potentiële energie van de uitgerekte katapult $V = -\int_0^u F(x)dx = \frac{1}{2}ku^2$ gelijk te stellen aan de kinetische energie $\frac{1}{2}mv_0^2$ vinden we $v_0 = u\sqrt{k/m}$.

b. De bewegingsvergelijking in vectorvorm is $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{\text{zw}} = -mg\mathbf{j}$.
Voor de horizontale x-richting geeft de vergelijking $\ddot{x} = 0$ als oplossing: snelheid v_x is constant $\Rightarrow x(t) = tv_0 \cos\alpha_0$.
Voor de verticale y richting geeft de vergelijking $\ddot{y} = -g$ als oplossing: snelheid $v_y = v_0 \sin\alpha_0 - gt \Rightarrow y(t) = tv_0 \sin\alpha_0 - \frac{1}{2}gt^2$.

c. De lijn $y = 0$ wordt weer gepasseerd op $t = 2v_0 \sin\alpha_0/g$. De horizontale afstand die dan is afgelegd is $x = (v_0^2/g)\sin 2\alpha_0$.

d. Het horizontale bereik is maximaal wanneer $dx/d\alpha_0 = 0$. Differentiëren van oplossing (c) levert het klassieke resultaat: $\cos 2\alpha_0 = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 45°$.

Opgave 4. (Rutherford terugverstrooiing)

a. Voor het labstelsel geeft behoud van (kinetische) energie de vergelijking:

$$\tfrac{1}{2}m_1v_1^2 = \tfrac{1}{2}m_1(v_1')^2 + \tfrac{1}{2}m_2(v_2')^2,$$

waarbij v_2' de eindsnelheid van het oorspronkelijk-stilstaande deeltje 2 is. Uit impulsbehoud volgt de vectorvergelijking:

$$m_1\mathbf{v}_1 = m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2'$$

b. Eliminatie van $m_2\mathbf{v_2} = m_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_1')$ uit de impulsvergelijking en substitutie in de energievergelijking geeft:

$$v_1^2 = (v_1')^2 + \frac{m_1}{m_2}[v_1^2 + (v_1')^2 - 2v_1v_1'\cos\theta].$$

Omschrijven naar een kwadratische vergelijking en oplossen via de abc-formule geeft als enige zinvolle eindresultaat:

$$v_1'/v_1 = \left(m_1 \cos\theta + \sqrt{m_2 - m_1 \sin^2\theta}\right)/(m_1 + m_2).$$

Bij nadere uitwerking kwam ik er, tot mijn schrik, achter dat een van de termen in dit resultaat een ander teken heeft dan de oplossing $v_1'/v_1 = \left(-m_1 \cos\theta + \sqrt{m_2 - m_1 \sin^2\theta}\right)/(m_1 + m_2)$ uit de oorspronkelijke opgave. Dit verschil heeft te maken met de definite van de verstrooiingshoek, θ of $(180^\circ - \theta)$, en wordt jullie natuurlijk niet aangerekend.

c. De formuler $v_1'/v_1 \approx (m_2 - m_1)/(m_2 + m_1)$ voor grote strooihoek geeft ook direct een uitdrukking voor de verhouding tussen de kinetische energie van het alpha deeltje na en voor de botsing

$$E_{\rm uit}/E_{\rm in} = (v_1'/v_1)^2 = (m_2 - m_1)^2/(m_2 + m_1)^2.$$

Invullen van $m_2 = 13m_1$ levert $E_{\rm uit}/E_{\rm in} = (6/7)^2 \approx 0.735$. Voor $E_{\rm in} = 2000$ keV geeft dit $E_{\rm uit} = 1470$ keV, wat goed overeenkomt met de afgelezen waarde $E_{\rm uit} \approx 1500$ keV.