Klassieke Mechanica a (Toets 25 maart 2011)

Uitwerkingen

Opgave 1.

a. Een kracht is conservatief als $\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$. Invullen van
$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -a(x-y)\mathbf{i} + a(x-y)\mathbf{j} - b\mathbf{k}$ toont aan dat dit zo is:
$(\nabla \times \mathbf{F})_x = \partial_y F_z - \partial_z F_y = 0,$
$(\nabla \times \mathbf{F})_y = \partial_z F_x - \partial_x F_z = 0,$
$(\nabla \times \mathbf{F})_z = \partial_x F_y - \partial_y F_x = a - a = 0.$

b. De potentiële energie vinden door via $V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{0}) - \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'$.
Integratie over een pad dat vanuit de oorsprong eerst in x-richting loopt, dan in de y-richting en vervolgens in de z-richting geeft
$V(x,y,z) = V(\mathbf{0}) - \int_0^x F_x(x',0,0)dx' - \int_0^y F_y(x,y',0)dy' - \int_0^z F_z(x,y,z')dz =$

$V(\mathbf{0}) + \frac{1}{2}ax^2 - axy + \frac{1}{2}ay^2 + bz = \frac{1}{2}a(x-y)^2 + bz.$

Na rotatie van het assenstelsel over een hoek van 45° rond de z-as, en invoering van nieuwe basisvectoren $\mathbf{i}' \equiv (\mathbf{i}+\mathbf{j})/\sqrt{2}$ en $\mathbf{j}' \equiv (-\mathbf{i}+\mathbf{j})/\sqrt{2}$ en nieuwe coordinaten $x' \equiv (x+y)/\sqrt{2}$ en $y' \equiv (-x+y)/\sqrt{2}$, kan het krachtveld geschreven worden als $\mathbf{F}(\mathbf{r}') = -2ay'\mathbf{j}' - b\mathbf{k}'$.

c. De bewegingsvergelijking $m\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F}(\mathbf{r}')$ van een puntmassa m in dit veld is separabel. In coordinaten levert dit drie vergelijkingen: $\ddot{x}' = 0$, $\ddot{y}' = -2(a/m)y'$, en $\ddot{z}' = -(b/m)$.

d. Na dubbele integratie over de tijd vinden we de positie van een voorwerp dat op $t = 0$ stil stond op positie $\mathbf{r}_0'$:
$x'(t) = x_0'$ (voorwerp beweegt niet in x'-richting),
$y'(t) = y_0' \cos \omega t$ met $\omega_0^2 \equiv 2a/m$
(zoals de beweging in een harmonische potentiaal),
$z'(t) = z_0' - (b/2m)t^2$ (zoals de beweging in een zwaartekrachtsveld).

Opgave 2.

a. De ontsnappingssnelheid kan berekend worden door gebruik te maken van de potentiaal $V(r) = -\int^r F_r(r')dr' = -\int^r Gm_1m_2/r'^2 dr' = -Gm_1m_2/r$, waarbij we $V(\infty) = 0$ hebben genomen. Een raket kan net ontsnappen aan deze potentiaal als $\frac{1}{2}mv_0^2 - GmM/R = 0$, waarbij M de massa van het hemellichaam is en R zijn straal. Invullen van de zwaartekrachtversnelling op het oppervlak $g = GM/R^2$ geeft $v_0^2 = 2gR$.

b. De ontsnappingssnelheid op aarde $v_0 \approx 11.2$ km/s vinden we na invullen van $g \approx 9.81 m/s^2$ en $R_{aarde} \approx 6400$ km.

Opgave 3

a. We schrijven de gegeven differentiaalvergelijking als $\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$ en vergelijken deze met de standaardvorm $\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$. Dit geeft een resonantiefrequentie van $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ voor het ongedempte systeem.

b. De resonantiefrequentie in de aanwezigheid van demping vinden we door invullen van de testoplossing $q(t) = \mathrm{Re}[q_0 \exp(-i\omega t)]$, met complexe ω. Voor de standaardvergelijking levert dit de tweede-orde vergelijking $-\omega^2 - 2i\gamma\omega + \omega_0^2 = 0$ met oplossingen: $\omega = -i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. De verschoven resonantiefrequentie voor ons systeem wordt hiermee $\omega_d \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{1 - R^2C/(4L)}/\sqrt{LC}$.

c. De amplitude $|q(t)| = |q_0| \exp(-\gamma t) \exp(-i\omega_d t)$ met $\gamma = R/(2L)$. De 1/e-tijd van amplitude verval is dus $2L/R$.

d. Invullen van de testoplossing in de vergelijking van de aangedreven harmonische oscillator met $V_{in}(t) = \mathrm{Re}[V_0 \exp(-i\omega t)]$ geeft als maximale lading op de condensator $|q_0| = (V_0/L)/|\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega|$.
Invullen van $\omega = (1/2)\omega_0$ en $\gamma \ll \omega_0$ geeft $q_0 = (4/3)V_0C$.
Invullen van $\omega = (3/2)\omega_0$ en $\gamma \ll \omega_0$ geeft $q_0 = (4/5)V_0C$.