Klassieke Mechanica a (Toets 25 maart 2011)

(s.v.p. elke opgave met naam/studienummer op nieuwe pagina)

Opgave 1.
Beschouw een krachtveld van de vorm $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -a(x-y)\mathbf{i} + a(x-y)\mathbf{j} - b\mathbf{k}$.

a. Toon aan dat deze kracht conservatief is.

b. Bepaal de potentiële energie van een voorwerp in dit veld.

Na rotatie van het assenstelsel over een hoek van 45° rond de z-as, en invoering van nieuwe basisvectoren $\mathbf{i}' \equiv (\mathbf{i}+\mathbf{j})/\sqrt{2}$ en $\mathbf{j}' \equiv (-\mathbf{i}+\mathbf{j})/\sqrt{2}$ en nieuwe coordinaten $x' \equiv (x+y)/\sqrt{2}$ en $y' \equiv (-x+y)/\sqrt{2}$, kan het krachtveld geschreven worden als $\mathbf{F}(\mathbf{r}') = -2ay'\mathbf{j}' - b\mathbf{k}'$.

c. Geef de bewegingsvergelijking van een puntmassa m in dit veld.

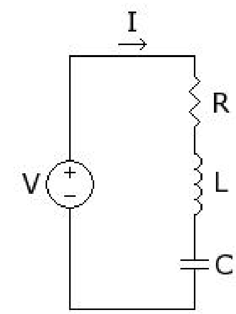
d. Los deze vergelijking op door integratie en bepaal daarmee de positie $\mathbf{r}'(t)$ van een voorwerp dat op $t = 0$ stil stond op positie $\mathbf{r}'_0$.

Opgave 2.
De ontsnappingssnelheid is de snelheid die een raket minimaal nodig heeft om volledig los te komen uit het zwaartekrachtsveld van een hemellichaam, zoals de aarde. De zwaartekracht tussen twee voorwerpen wordt beschreven door de algemene formule $F = Gm_1.m_2/r^2$, waarbij m_1 en m_2 de massa zijn, r de onderlinge afstand, en G de zwaartekrachtsconstante.

a. De ontsnappingssnelheid is een relatief eenvoudige functie van de zwaartekrachtsversnelling g op het oppervlak en de straal R van het hemellichaam. Leidt deze formule af door gebruik te maken van het begrip potentiele energie. N.B. de zwaartekracht is een centrale kracht en dus conservatief.

b. Bereken de ontsnappingssnelheid op aarde; gebruik hiervoor $g \approx 9.81 m/s^2$ en $R_{aarde} \approx 6400$ km.

Opgave 3.
De gedempte harmonische oscillator komt vaak voor in de natuurkunde. Bij deze opgave werken we een elektrische versie van dit systeem verder uit, een versie die in het boek besproken wordt onder "Electrical-Mechanical Analogs". Het hiernaast getekende elektrisch circuit bestaat uit een serieschakeling van een ideale spoel (inductie L), weerstand (weerstand R) en condensator (capaciteit C), en kan worden aangedreven met een harmonisch-oscillerende spanningsbron $V_{in}(t)$. Door gebruik te maken van de bekende verbanden tussen de elektrische stroom door en de spanning over deze elektrische componenten, vinden we de volgende differentiaal vergelijking voor de lading q op de condensator:



$$L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = V_{in}(t)$$

We beschouwen eerst de eigenschappen van het niet-aangedreven systeem ($V_{in}(t) = 0$).

a. Bepaal de resonantiefrequentie ω_0 van het ongedempte systeem ($R = 0\ \Omega$).

b. Hoe verandert de resonantiefrequentie in de aanwezigheid van demping? Beschouw enkel het ondergedempte geval.

c. Geef een uitdrukking voor de dempingstijd van de amplitude, d.w.z. de $1/e$ tijd van het amplitudeverval, voor het ondergedempte geval.

We beschouwen tot slot het harmonisch aangedreven systeem, waarbij $V_{in}(t) = V_0 \cos(\omega t)$

d. Geef een uitdrukking voor de maximale lading op de condensator bij zwakke demping, d.w.z. relatief kleine R, voor twee verschillende aandrijffrequenties: *(i)* $\omega = (1/2)\omega_0$ en *(ii)* $\omega = (3/2)\omega_0$