Klassieke Mechanica a (Hertentamen 6 juni 2012)

Uitwerkingen

Opgave 1.Drie korte vragen

a. Het gevraagde potentiaal verschil vinden we door integratie in de x-richting:

$$\Delta V = V(1,0,0) - V(0,0,0) = -\int_0^1 F_x(x',0,0)dx' = -\int_0^1 a(x')^2 - bdx' = -\tfrac{1}{3}a + b$$

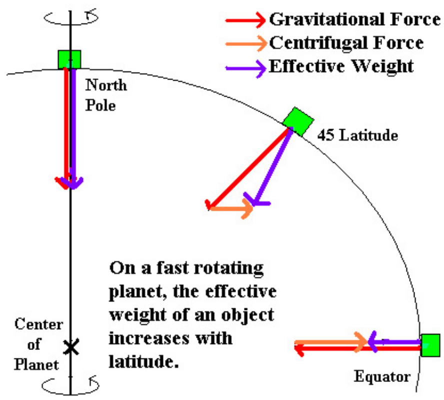
N.B. De kracht $\mathbf{F}(x,y,z) = (ax^2-b)\mathbf{i}+(by^2-a)\mathbf{j}-az\mathbf{k}$ is conservatief omdat $\nabla\times\mathbf{F} = \mathbf{0}$ voor elke separabele kracht (waar F_x enkel een functie van x is, etc.).

b. De differentiaalvergelijking $\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x = 0$ kan worden opgelost door het invullen van de testoplossing $x(t) = x_0 \exp(-i\omega t)$. De aard van deze testoplossing wordt bepaald door de discriminant $D = 4(\omega_0^2 - \gamma^2)$ van de vergelijking $-\omega^2 - i2\gamma\omega + \omega_0^2 = 0$. We onderscheiden drie regimes:
(i) Onder-gedempte oscillatie ($\gamma < \omega_0$)
(ii) Kritisch-gedempte oscillatie ($\gamma = \omega_0$)
(i) Over-gedempte oscillatie ($\gamma > \omega_0$)

c. Een "eenparig versnelde beweging" is een beweging onder invloed van een constante versnelling. Als we deze versnelling $\mathbf{a}_0$ noemen en de beginsnelheid $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$, dan wordt de snelheid $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}_0 t$. Met een beginpositie $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ wordt de positie $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}_0 t^2$, waarbij alle vetgedrukte variabelen 3-dimensionale vectoren zijn.

Opgave 2. Voorwerp valt van hoog gebouw

a. De lokale verticaal wijst niet naar het centrum van de aarde, maar wijst iets verder van de draaias ten gevolge van de centrifugale niet-inertiaal kracht veroorzaakt door de draaïng van de aarde (zie pijltjes bij "45 latitude" in onderstaande figuur)

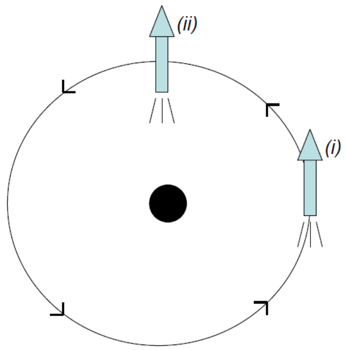


b. De kogel landt naast de markering omdat een bewegend object invloed ondervindt van de Corioliskracht $\boldsymbol{F}_{Coriolis} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$. Met $\boldsymbol{\omega}$ "naar boven" in het plaatje (want de zon komt in het oosten op) en $\mathbf{v}$ bijna naar het centrum van de aarde, wijst $-\mathbf{2}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ naar het oosten op elke plek op aarde, behalve op de polen waar deze kracht verdwijnt.

c. Voor de vrije val geldt $v(t) = gt$ met afgelegde afstand $h = {}^1\!/\!_2 g t_0^2$ in valtijd t_0.
Rekening houdende met het vector karakter van $-\mathbf{2}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ geeft dit een dwarsversnelling $F_{Coriolis}(t)/m = 2\omega' gt$ met $\omega' = \omega \cos\theta$ (Breedtegraad $\theta = 25° \Rightarrow \cos\theta = 0.906$).
Integratie van $dv_{dwars}(t)/dt = F_{Coriolis}(t)/m$ geeft een dwarssnelheid $v_{dwars}(t) = \omega' g t^2$ (met $v(0) = 0$) en een dwarsverplaatsing $x_{dwars}(t) = \frac{1}{3}\omega' g t^3$ (met $x(0) = 0$), oftewel $x_{dwars}(t_0) = \frac{2}{3} h t_0 \omega \cos\theta$.

d. Invullen van $h = 450$ m, $\omega = 2\pi/86400$, $\cos\theta = 0.906$, $g = 9.8$ m^2/s, en $t_0 = \sqrt{2h/g} = 9.6\ s$ geeft $x_{dwars} = 0.19$ m $= 19$ cm.

Opgave 3. (Raket rond aarde)



a. De omloopsnelheid volgt uit de balans tussen zwaartekracht en centrifugaalkracht:

$$\frac{GMm}{R^2} = mv_C^2 R \Rightarrow v_C = \sqrt{GM/R}$$

b. Bij de ontsnappingssnelheid v_E is de kinetische energie $\frac{1}{2}mv_E^2$ van de raket precies groot genoeg om aan zijn negatieve potentiële energie in het zwaartekrachtsveld $V(R) = -GMm/R$ te ontsnappen, oftewel $v_E = \sqrt{2GM/R} = \sqrt{2}v_C$. Deze uitkomst is onafhankelijk van de richting van $\boldsymbol{v}_E$ omdat de ontsnappingsnelheid bepaald wordt door een *energiebalans* en omdat de kinetische energie enkel afhangt van de absolute waarde $v_E = |\boldsymbol{v}_E|$.

c. Voor geval (i) (= punt van de raket in de tangentiële richting) zijn $\Delta\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}_E$ en $\boldsymbol{v}_C$ evenwijdig en geldt $|\Delta\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{v}_E - \boldsymbol{v}_C| = \left(\sqrt{2}-1\right)|\boldsymbol{v}_c| \approx 0.41v_C$.
Voor geval (ii) (= punt van de raket in de radiële richting) geldt $\Delta\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{v}_C$ waardoor $|\Delta\boldsymbol{v}| = v_C$ nodig is om $|v_{na}| = v_E = \sqrt{2}v_C$ te bereiken.
Voor geval (ii) is veel meer brandstof nodig omdat de door de uitgestoten brandstof geleverde arbeid $\int dW = \int \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{x} = \int \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}dt$ het inproduct van $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} \propto \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ bevat. Voor geval (ii) staat de stuwkracht aan het begin bijna loodrecht op de snelheid, waardoor deze aan het begin weinig arbeid levert en amper bijdraagt aan de snelheidstoename.

d. De snelheidsverandering van de raket $d\mathbf{v}/dt$ bij stationaire ontbranding volgt uit impulsbehoud: $md\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}(-dm) = 0$ met $dm/dt < 0$, oftewel

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\boldsymbol{u}}{m}\frac{dm}{dt}$$

Integratie van deze differentiaal vergelijking geeft de gevraagde vergelijking:

$$\int d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\int(1/m)dm \Rightarrow \Delta\boldsymbol{v} \equiv \boldsymbol{v}_{na} - \boldsymbol{v}_{voor} = \boldsymbol{u}\left(\log m_{na} - \log m_{voor}\right) = -\boldsymbol{u}\log\left(\frac{m_{voor}}{m_{na}}\right)$$

Opgave 4. (Botsing met stilstaand voorwerp)

a. In het stilstaande frame beweegt het zwaartepunt met een snelheid $\boldsymbol{v}_{cm} = \frac{m_1 \boldsymbol{v}_0}{m_1+m_2}$. Dit maakt de snelheden $\bar{\boldsymbol{v}}_i$ van de deeltjes ($i = \{1, 2\}$) *in het zwaartepuntsstelsel* voor de botsing gelijk aan

$$\bar{\boldsymbol{v}}_1 = \boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{v}_{cm} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{v}_0 \quad \& \quad \bar{\boldsymbol{v}}_2 = -\boldsymbol{v}_{cm} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{v}_0$$

Bij een elastische botsing veranderen deze snelheden enkel van richting, maar niet van grootte, oftewel $|\bar{\boldsymbol{v}}_i'| = |\bar{\boldsymbol{v}}_i|$

b. Na een frontale elastische botsing zijn de eindsnelheden in het laboratoriumstelsel:

$$v_1' = -\bar{v}_1 + v_{cm} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0$$

$$v_2' = -\bar{v}_2 + v_{cm} = 2v_{cm} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0$$

waar we de vectornotatie hebben weggelaten omdat alle snelheden op één lijn liggen.

c. Bij een niet-frontale botsing moeten we rekening houden met de verstrooihoek θ_1 van deeltje 1 in het zwaartepuntsstelsel, een hoek die we meten t.o.v. de $\boldsymbol{i}$-as die samenvalt met de richting van de beginsnelheid $\boldsymbol{v}_0$. Na botsing is $\bar{\boldsymbol{v}}_1' = \frac{m_2}{m_1+m_2} v_0 \left(\cos\theta_1 \boldsymbol{i} + \sin\theta_1 \boldsymbol{j}\right)$ in het zwaartepuntsstelsel en

$$\boldsymbol{v}_1' = v_0 \frac{m_2}{m_1 + m_2} \left[\left(\cos\theta_1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \boldsymbol{i} + \sin\theta_1 \boldsymbol{j} \right]$$

in het laboratoriumstelsel. De verstrooihoek ϕ_1 in het laboratoriumstelsel is daarom

$$\tan\phi_1 = \frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1 + \frac{m_1}{m_2}}$$

d. De maximale verstrooihoek ϕ_1 vinden we door bovenstaande vergelijking naar θ_1 te differentiëren en het resultaat op nul te stellen. Dit geeft

$$\cos\theta_1 = -m_2/m_1 \Rightarrow \tan\phi_1 = \frac{m_2}{\sqrt{m_1^2 - m_2^2}} \Rightarrow \phi_1 = \arctan\left(\frac{m_2}{\sqrt{m_1^2 - m_2^2}} \right)$$

voor $m_1 > m_2$.