Klassieke Mechanica a (Hertentamen 6 juni 2012)

SVP naam + studentnummer rechtsboven op elke pagina

Opgave 1. (Drie korte vragen)

a. We beschouwen een conservatief krachtenveld van de vorm $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (ax^2 - b)\boldsymbol{i} + (by^2 - a)\boldsymbol{j} - az\boldsymbol{k}$, met a en b constanten. Bereken het verschil in potentiële energie $\Delta V = V(1, 0, 0) - V(0, 0, 0)$.

b. De uitwijking $x(t)$ van elke gedempte harmonische oscillator wordt beschreven door de differentiaalvergelijking
$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$
Benoem de drie verschillende regimes van beweging die uit deze vergelijking volgen en geef de bijbehorende relaties tussen γ en ω_0.

c. Definieer het begrip "eenparig versnelde beweging" en geef de algemene formule voor de 3-dimensional positie $\boldsymbol{x}(t)$ onder zo'n beweging (of leid deze af).

Opgave 2. (Voorwerp valt van hoog gebouw)

Op een windstille dag laten we een kanonskogel vanaf rust vallen vanaf een uitstekende stellage van de $h = 450$ meter hoge Taipei 101 wolkenkrabber in Taipei, Taiwan ($\theta = 25°$ noorderbreedte). Omdat dit een gevaarlijk experiment is meten we vooraf de lokale verticaal met een schietlood (= massa aan touw) en markeren de plek op de grond die "recht onder de stellage" ligt. Na het uitvoeren van het valexperiment, blijkt de kanonskogel naast de markering te zijn geland.

a. Verklaar waarom de lokale verticaal niet naar het centrum van de aarde wijst en op welke manier hij afwijkt. Maak een tekening om verwarring bij het nakijken te voorkomen.

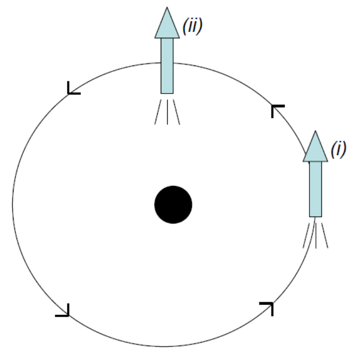
b. Waarom landt de kogel naast de markering en in welke richting (Noord, Zuid, Oost, West) wijkt hij af? Beredeneer je antwoord op basis van een formule.

c. Toon aan dat de dwarsverplaatsing van de kogel, bij verwaarlozing van de luchtwrijving, gelijk is aan
$$x_{dwars}(t_0) = \tfrac{2}{3} h t_0 \omega \cos\theta$$
met t_0 de valtijd en ω de hoeksnelheid van de aardrotatie. Hint: Beschrijf eerst de vrije val zonder rekening te houden met de dwarsverplaatsing en bereken daarna pas de dwarsverplaatsing als een kleine verstoring op deze vrije val.

d. Bereken de afwijking met bovenstaande getallen en een zwaartekrachtsversnelling $g = 9.8$ m^2/s.

Opgave 3. (Raket rond aarde)

Een raket draait rondjes rond de aarde in een cirkelvormige baan en kan hierbij verschillende oriëntaties hebben, getekend als situatie (i) of (ii) in de figuur.



a. Laat zien dat de omloopsnelheid bepaald wordt door $v_C = \sqrt{GM/R}$, met G de zwaartekrachtsconstante, M de massa van de aarde en R de straal van de cirkelvormige baan.

b. Bepaal ook de ontsnappingssnelheid v_E die nodig is om vanaf deze afstand naar $r \to \infty$ te ontsnappen en leg uit waarom v_E niet afhangt van de richting van deze snelheid.

Om aan de aarde te ontsnappen wordt de raketmotor gedurende korte tijd $\Delta t \ll$ omloopstijd aangezet. Hierbij stoot hij massa uit met een constante uitstootsnelheid $\boldsymbol{u}$ t.o.v. de raket en met een constante flux $|dm/dt|$, zodat de massa van de raket afneemt van m_{voor} naar m_{na}. We beschouwen twee situaties: (i) de punt van de raket staat in de bewegingsrichting (= tangentieel), (ii) de punt van de raket staat in radiële richting (zie figuur).

c. Welke absolute snelheidstoename $|\Delta \boldsymbol{v}|$ heb je nodig om van de aarde te ontsnappen voor geval (i) (= punt van de raket in de tangentiële richting) en voor geval (ii) (= punt van de raket in de radiële richting). Verklaar het mogelijke verschil tussen deze twee situaties in termen van de door de uitgestoten brandstof geleverde arbeid op een kwalitatieve manier (dus zonder lange berekening).
(Opmerking: als het bepalen van v_E bij onderdeel b niet gelukt is, gebruik dan gewoon v_E als parameter in je berekening.)

d. Stel een vergelijking op voor de verandering van de snelheid van de raket $d\boldsymbol{v}/dt$ in termen van de genoemde variabelen en laat zien dat de totale snelheidsverandering na de beschreven ontbranding gelijk is aan $\Delta \boldsymbol{v} \equiv \boldsymbol{v}_{na} - \boldsymbol{v}_{voor} = -\boldsymbol{u} \ln(m_{voor}/m_{na})$.

Opgave 4. (Botsing met stilstaand voorwerp)

Deeltje 1, met massa m_1 en snelheid v_0, botst elastisch met een stilstaand deeltje met massa m_2. De snelheden van de uitgaande deeltjes hangen af van de manier waarop de deeltjes elkaar raken. Ze kunnen het eenvoudigst beschreven worden in het zwaartepuntsstelsel.

a. Bepaal de absolute snelheden van de deeltjes ($i = \{1, 2\}$) *in het zwaartepuntsstelsel*, zowel voor als na de botsing (in het boek aangegeven met $|\bar{\boldsymbol{v}}_i|$ en $|\bar{\boldsymbol{v}}'_i|$)

b. Bepaal de eindsnelheden van beide deeltjes *in het laboratoriumstelsel* voor een frontale botsing (verstrooihoek deeltje 2 is $\phi_2 = 0$).

c. Laat θ_1 de verstrooiingshoek van deeltje 1 in het zwaartepuntsstelsel zijn. Toon aan dat de verstrooiingshoek ϕ_1 in het laboratoriumstelsel gegeven wordt door

$$\tan \phi_1 = \frac{m_2 \sin \theta_1}{m_1 + m_2 \cos \theta_1}$$

d. Toon aan dat, als $m_1 > m_2$, de maximale hoek waaronder deeltje 1 wordt verstrooid gelijk is aan

$$\phi_{1,max} = \arctan\left(\frac{m_2}{\sqrt{m_1^2 - m_2^2}}\right)$$