Klassieke Mechanica a (Tentamen 11 mei 2012)

Uitwerkingen

Opgave 1. (Beweging in een conservatief krachtenveld)

a. Een kracht is conservatief als $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Dit blijkt na invullen:
$(\nabla \times \mathbf{F})_x = \partial F_z/\partial y - \partial F_y/\partial z = 0 - 0 = 0$,
$(\nabla \times \mathbf{F})_y = \partial F_x/\partial z - \partial F_z/\partial x = 0 - 0 = 0$,
$(\nabla \times \mathbf{F})_z = \partial F_y/\partial x - \partial F_x/\partial y = 0 - 0 = 0$

b. *Methode 1*
De bijbehorende potentiaal $V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{0}) - \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'$ lossen we op door een pad te kiezen vanuit de oorsprong naar positie $\mathbf{r}$ op te delen in drie integraties.
Integratie van $(0,0,0)$ naar $(x,0,0)$ geeft $-\int_0^x F_x dx' = \int_0^x Cx'dx' = \frac{1}{2}Cx^2$.
Integratie van $(x,0,0)$ naar $(x,y,0)$ geeft $-\int_0^y F_y dy' = \int_0^y Cy'dy' = \frac{1}{2}Cy^2$.
Integratie van $(x,y,0)$ naar (x,y,z) geeft $-\int_0^z F_z dz' = \int_0^z 4Cz'dz' = 2Cz^2$.
Combinatie van deze drie integralen geeft:

$$V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{0}) + \tfrac{1}{2}Cx^2 + \tfrac{1}{2}Cy^2 + 2Cz^2$$

Deze eenvoudige som van drie potentialen in x, y en z volgt ook direct uit de factoriseerbaarheid van het krachtenveld.
Methode 2
Los de vergelijking $\nabla V = -\mathbf{F}$ componentsgewijs op:
$\partial V/\partial x = Cx \iff V = \frac{1}{2}Cx^2 + V(y,z)$
$\partial V/\partial y = Cy \iff V = \frac{1}{2}Cy^2 + V(x,z)$
$\partial V/\partial z = 4Cz \iff V = 2Cz^2 + V(x,y)$
Gecombineerd geeft dit $V(\mathbf{r}) = V_0 + \frac{1}{2}Cx^2 + \frac{1}{2}Cy^2 + 2Cz^2$.

Vergeet V_0 term niet

c. De beweging in de x-, y- en z-richting zijn separabel, d.w.z. onafhankelijk van elkaar. We kunnen de vergelijking $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$ dus splitsen in componenten:

F=ma is vectorvergelijking => Splitst in 3 scalaire vergelijkingen

- $m\ddot{x} = F_x = -Cx$. Dit is de vergelijking voor een harmonische oscillator met hoekfrequentie $\omega = \sqrt{C/m}$. De algemene oplossing is $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ (of $x(t) = D\cos(\omega t + \phi)$). Uit de beginvoorwaarden $x(0) = x_0$ en $\dot{x}(0) = 0$ volgt $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$.

Herken de bewegingsvergelijking van de harmonische oscillator

- $m\ddot{y} = F_y = -Cy$. Dit is wederom een oscillator met dezelfde frequentie ω. Uit de beginvoorwaarden $y(0) = 0$ en $\dot{y}(0) = v_{0y}$ volgt nu $y(t) = \frac{v_{0y}}{\omega}\sin(\omega t)$.
- In de z-richting geldt $z(t) = 0$, want $z(0) = \dot{z}(0) = 0$ en dus ook $\ddot{z}(0) = F_z/m = 0$; er is dus geen beweging en die komt ook niet op gang.

Totaal hebben we dus $\mathbf{r}(t) = x_0\cos(\omega t)\mathbf{i} + \frac{v_{0y}}{\omega}\sin(\omega t)\mathbf{j}$. Dit beschrijft een ellips in het (x,y)-vlak.

Opgave 2. (Effectieve één-dimensionale potentiaal)

Deze opgave staat bijna letterlijk in sectie 6.11 van het boek, inclusief het plaatje van de effectieve potentiaal, maar bleek lastig

a. Zoals altijd is energie behouden. Bij een centraal krachtenveld is ook het impulsmoment behouden, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ofwel $L = mr^2\dot{\theta} = m\ell$.

De impuls is niet behouden, want de snelheid verandert, maar de draaiimpuls = impulsmoment (engels: angular momentum) wel

b. We gebruiken $E = T + V$. We hebben $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e_r} + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$, waarbij $\mathbf{e_r}$ en $\mathbf{e}_\theta$ loodrecht op elkaar staan. De kinetische energie is dus $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$. Omdat $\ell = r^2\dot{\theta}$ constant is, kunnen we $\dot{\theta} = \ell/r^2$ schrijven, zodat $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \ell^2/r^2)$.
We hebben dus $E = T + V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \ell^2/r^2) - \frac{GMm}{R}$. Om alleen de beweging in de radiële richting te beschrijven, stellen we $E = T_{eff} + V_{eff}$ met $T_{eff} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$ (de kinetische energie in de radiële richting). Dat geeft:

$$V_{eff} = E - T_{eff} = -\frac{GMm}{R} + \frac{m\ell^2}{2r^2} = -\frac{K}{R} + \frac{m\ell^2}{2r^2}$$

met $K = GMm$.
Zie ook sectie 6.11 in Fowles & Cassiday

c. Vanaf punt A neemt r toe, want $dV/dr < 0$. Omdat $V(r)$ kleiner blijft dan $V(A)$, behoudt de testmassa kinetische energie, zodat r naar oneindig gaat, met eindige snelheid. Dit komt overeen met een hyperbool.
Voor punt B geldt hetzelfde als voor punt A, maar nu gaat de snelheid naar nul als $r \to \infty$, omdat de $V(r)$ naar $V(B) = 0$ convergeert. Dit geeft een parabool.
Punt C zit in het minimum van de potentiaal, dus als de snelheid $\dot{r}$ hier nul is, blijft $r = r_0$ constant. Dit is dus een cirkelbaan.
Vanaf punt D neemt r af, tot het punt dat $V(r_{min}) = V(D)$, waarna r weer toeneemt, totdat het weer omslaat bij D. Dit komt dus overeen met een ellips.
Zie ook vergelijking (6.10.10) in Fowles & Cassiday Het deeltje ontsnapt uit de zwaartekrachtspotentiaal als V > 0, waardoor de beweging vanaf punt A met een hyperbool in 3-D correspondeert en de beweging vanaf punt B (V=0) met een parabool

d. We kijken nu in het zwaartepuntstelsel, waarin $m_1\mathbf{r_1} + m_2\mathbf{r_2} = 0$. Dan hebben we:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r_1} - \mathbf{r_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_2}\mathbf{r_1} = -\frac{m_1 + m_2}{m_1}\mathbf{r_2}$$

Beschouw de totale energie. Als functie van R blijft de potentiële energie ongewijzigd, $V(R) = -K/R$. De kinetische energie van beide massa's is:

$$T = \tfrac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r_1}}^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r_2}}^2 = \tfrac{1}{2}m_1\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2\dot{\mathbf{R}}^2 + \tfrac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2\dot{\mathbf{R}}^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\dot{\mathbf{R}}^2 = \tfrac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{R}}^2$$

waarbij $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ de gereduceerde massa is. Splitsen we de kinetische energie weer op in een radieel en tangentieel deel, zoals bij onderdeel a, dan vinden we:

$$T = \tfrac{1}{2}\mu(\dot{R}^2 + R^2\dot{\theta}^2) = \tfrac{1}{2}\mu\dot{R}^2 + \frac{\mu\ell^2}{2R^2}$$

waarbij $\ell = R^2\dot{\theta}$ constant is. Dit is namelijk het totale impulsmoment van beide massa's gedeeld door de gereduceerde massa:

$$L_1 + L_2 = m_1 r_1^2 \dot{\theta} + m_2 r_2^2 \dot{\theta} = \mu R^2 \dot{\theta} = \mu \ell$$

Merk op dat $\dot{\theta}$ voor beide massa's gelijk is, omdat het verschil tussen θ_1 en θ_2 altijd π is.
Voor de effectieve potentiaal voor een massa μ vinden we dus:

$$V_{eff}(\mu, R) = E - T_{eff} = T + V - \frac{1}{2}\mu \dot{R}^2 = -\frac{K}{R} + \frac{\mu \ell^2}{2R^2}$$

We kunnen het ook eventueel omschrijven naar een potentiaal voor massa m_1, door E met m_1/μ te vermenigvuldigen. Dan vinden we:

$$V_{eff}(m_1, R) = \frac{m_1}{\mu}(T + V) - \frac{1}{2} m_1 \dot{R}^2 = -\frac{G m_1 (m_1 + m_2)}{R} + \frac{m_1 \ell^2}{2R^2}$$

Deze vorm sluit meer aan bij vergelijking (7.3.8) in Fowles & Cassiday.
Zie ook sectie 7.3 in Fowles & Cassiday

Deze vraag bleek voor bijna iedereen te moeilijk. Hij telt daardoor enkel mee voor bonuspunten!

Opgave 3. (Bepaal de snelheid van een kogel)

a. De totale impuls van een systeem (in dit geval kogel en blok) is altijd behouden bij de afwezigheid van externe krachten. De kinetische energie is niet behouden, want de botsing is niet volledig elastisch: bij een volledig elastische botsing zou de kogel terugstuiteren van het veel zwaardere houten blok.

Veel studenten vergaten dat impulsbehoud ALTIJD geldt (en energiebehoud enkel bij elastische botsingen)

b. Voor de inslag hebben de kogel en het blok gezamenlijk een impuls mv, na inslag is dit $(M+m)v_{blok}$. Uit impulsbehoud volgt dat deze gelijk zijn, dus $v_{blok} = \frac{m}{M+m}v$. Het blok heeft dan een kinetische energie $T = \frac{1}{2}(M+m)v_{blok}^2$. We kiezen $V = 0$. Als het blok op zijn hoogste punt is, is $T = 0$, en heeft het blok een potentiële energie $V = (M+m)g\Delta h$, waarbij Δh de hoogte is van het blok t.o.v. de oorspronkelijke hoogte. Uit behoud van energie, $E = T + V$, volgt dus:

Hier zagen we regelmatig formules over energiebehoud: 1/2 m v_0^2 enzo. Dit is niet juist

$$(M+m)g\Delta h = \frac{1}{2}(M+m)v_{blok}^2 = \frac{1}{2}(M+m)\left(\frac{m}{M+m}v\right)^2$$

$$\Delta h = \frac{1}{2g}\left(\frac{m}{M+m}v\right)^2$$

Uitgedrukt in de maximale uitwijkhoek θ hebben we $\Delta h = \ell(1-\cos\theta)$, dus:

$$\cos\theta = 1 - \frac{\Delta h}{\ell} = 1 - \frac{1}{2g\ell}\left(\frac{m}{M+m}v\right)^2$$

N.B.: Zoals al opgemerkt bij vraag a is de kinetische energie niet behouden. Dat betekent dat een methode op basis van $E = T + V$ (vergeleken voor de inslag en bij de maximale uitwijking) niet werkt!

c. Oplossen naar v geeft $v = \frac{M+m}{m}\sqrt{2g\ell(1-\cos\theta)}$, dus:

$$v = \frac{1000+5}{5}\sqrt{2 \cdot 9.8\,\mathrm{m/s^2} \cdot 1\,\mathrm{m} \cdot (1-\cos 30^\circ)} = 326\,\mathrm{m/s}$$

d. Als de kogel afketst, dan krijgt de kogel een impuls in de tegengestelde richting. Het impulsverschil van de kogel voor en na de botsing, dat gelijk is aan de impulsoverdracht naar het blok (wegens impulsbehoud), is dus groter voor het metalen blok. Het metalen blok krijgt dus een hogere beginsnelheid en ook een grotere uitwijkhoek.
N.B.: het houten blok krijgt de massa van de kogel erbij, dus heeft het houten blok – bij gelijke impuls – een lagere snelheid dan het lichtere massieve blok. Dit effect is echter veel kleiner dan het hierboven genoemde (want de impuls is heel verschillend voor beide blokken).

Ook hier werd weer vaak over energie gesproken, in plaats van over impulsbehoud

e. De bewegingsvergelijking volgt uit $F = ma$, ofwel $-c_1 v = m\frac{dv}{dt}$. Deze lossen we op door scheiding van variabelen:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{c_1}{m}dt \iff \int \frac{dv}{v} = \int -\frac{c_1}{m}dt$$

$$\log v = -\frac{c_1}{m}t + C \iff v(t) = e^{-(c_1/m)t+C} = C' e^{-(c_1/m)t}$$

De randvoorwaarde $v(0) = v_0$ legt C' vast: $v(t) = v_0 e^{-(c_1/m)t}$. Integreren geeft:

$$x(t) = \int_0^t v(t')dt' = \frac{mv_0}{c_1}(1 - e^{-(c_1/m)t})$$

f. De indringdiepte is $d = \lim_{t\to\infty} x(t) = mv_0/c_1$, dus $c_1 = mv_0/d$. De versnelling is:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{-c_1 v}{m} = -\frac{mv_0}{d}\frac{v_0}{m} = -\frac{v_0^2}{d} = -\frac{(500\,\mathrm{m/s})^2}{0.05\,\mathrm{m}} = -5\cdot 10^6\,\mathrm{m/s^2}$$

Zorg ervoor dat je de juiste eenheden gebruikt, dus niet zowel getallen in cm als in m of m/s invullen.

Opgave 4. (Stuiterende ballen)

Deze opgave gaf verrassend veel problemen, omdat de definitie van het zwaartepuntstelsel nog niet voor iedereen duidelijk was.

a. Na de botsing met de grond, dus voor de botsing met de bovenste bal, heeft de onderste bal snelheid $v_M = -v_0$. Het massamiddelpunt heeft snelheid

Vergeet het min teken van v_M niet

$$v_{cm} = \frac{mv_m + Mv_M}{m+M} = \frac{m-M}{m+M}v_0$$

In het zwaartepuntstelsel zijn de snelheden van de ballen dus

$$\bar{v}_m = v_m - v_{cm} = \frac{2M}{m+M}v_0 \qquad \text{en} \qquad \bar{v}_M = v_M - v_{cm} = -\frac{2m}{m+M}v_0$$

Na de botsing zijn de snelheden van teken veranderd, $\bar{v}'_m = -\bar{v}_m$ en $\bar{v}'_M = -\bar{v}_M$. (In het algemeen, in meer dan 1 dimensie, zijn de groottes van de snelheden, voor en na de botsing, in het zwaartepuntstelsel hetzelfde bij een elastische botsing. Dit volgt makkelijk uit het gegeven dat de totale impuls nul is in het zwaartepuntstelsel.)

Daarom is het zo handig om elastische botsingen eerst in het zwaartepuntstelsel te beschrijven!

b. Terug in het ruststelsel vinden we

$$v'_m = v_{cm} + \bar{v}'_m = v_{cm} - \bar{v}_m = \frac{m-3M}{m+M}v_0 \qquad \text{en} \qquad v'_M = \frac{3m-M}{M+m}v_0$$

c. Op basis van het antwoord bij b zien we dat $v'_M = 0$ als $M/m = 3$. Invullen geeft $v'_m = -2v_0$.

d. Impuls- en energiebehoud zijn gegeven door $mv_m + Mv_M = mv'_m + Mv'_M$ en $\frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2 = \frac{1}{2}mv'^2_m + \frac{1}{2}Mv'^2_M$. Invullen van de gegeven beginsnelheden en de conditie $v'_M = 0$ geeft:

$$(m-M)v_0 = mv'_m \qquad \text{en} \qquad \frac{1}{2}(m+M)v_0^2 = \frac{1}{2}mv'^2_m$$

Twee vergelijkingen met twee onbekenden bleken onder andere lastig vanwege de tekens

Als we de eerste relatie voor v'_m in de tweede substitueren (en delen door $\frac{1}{2}v_0^2$) vinden we de relatie

$$m + M = \frac{(m-M)^2}{m}$$

met als oplossing $M/m = 3$.