Tentamen Klassieke Mechanica a , 25 mei 2018 , 10u00 – 13u00

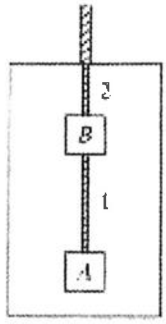
Let op – lees onderstaande goed door!

Het tentamen bestaat uit **4** opgaven, onder de laatste staat 'Einde'. Het totaal aantal te behalen punten is **40**, het aantal voor de individuele onderdelen is aangegeven. Er mag geen elektronische apparatuur gebruikt worden.

- Maak iedere opgave op een **apart blad**, omdat opgaven ieder apart worden nagekeken.
- Schrijf op ieder blad je **naam** en **studentnummer**.
- Alle **telefoons** moeten **uit** staan, in je **tas/jas** zitten, en mogen tijdens het tentamen niet tevoorschijn worden gehaald.
- Schrijf duidelijk en werk overzichtelijk. Kladpapier wordt niet nagekeken.
- Bij constatering van **fraude** wordt de student van verdere deelname aan het tentamen uitgesloten. Dit zal tevens aan de examencommissie worden doorgegeven.
- Denk aan de enquête.

VEEL SUCCES!

Opgave 1. (divers 2+2+2+2+1 = 9)



1. De blokken A, met massa m_A, en B, met massa 3 m_A, hangen met massaloze touwen 1,2 aan het plafond van een lift die omhoog beweegt met constante snelheid v_0. De versnelling door de zwaartekracht is g. Geef de waarde van de kracht van touw 2 op blok B. Die is :

   (a) 2 m_A g ; (b) 3 m_A g ; (c) 4 m_A g ; (d) afhankelijk van v_0.

2. Karretje A met massa m en en karretje B met massa $2m$ staan op wrijvingsloze rails. De karretjes worden gedurende een tijd t met dezelfde kracht geduwd en krijgen hierdoor een kinetische energie $E_{K,A}$ en $E_{K,B}$. Wat kun je zeggen over de kinetische energie van de lichte kar (massa m). Ten opzichte van de kinetische energie van de zware kar is die :

   (a) groter ; (b) gelijk ; (c) kleiner

3. Een ring met straal R en massa m draait om een as door het midden van de ring en loodrecht op het vlak van de ring. Aan de ring is een bepaalde hoeveelheid energie E gegeven, die correspondeert met de hoeksnelheid ω_1. De ring wordt stil gezet, en er wordt een kogeltje, ook met massa m, aan de ring bevestigd. Dezelfde hoeveelheid energie wordt toegevoerd, wat leidt tot een hoeksnelheid ω_2. Er geldt :

   (a) $\omega_2 = \frac{1}{2}\,\omega_1$; (b) $\omega_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\omega_1$; (c) $\omega_2 = \omega_1$; (d) $\omega_2 = \sqrt{2}\,\omega_1$; (e) $\omega_2 = 2\,\omega_1$

4. Een satelliet draait in een cirkelbaan rond de aarde, met een kinetische energie E_K en een draaimoment met absolute waarde $|L|$. De motor wijst van het middelpunt van de aarde af (de radiële richting) en wordt gedurende korte tijd aangezet zodat de satelliet dichter naar de aarde komt. Geef aan welke uitspraak over $|L|$. correct is, en welke uitspraak over E_K correct is (geef dus *twee* letters in je antwoord):

   (a) $|L|$ wordt groter ; (b) $|L|$ blijft gelijk; (c) $|L|$ wordt kleiner;
   (d) E_K wordt groter ; (e) E_K blijft gelijk; (f) E_K wordt kleiner;

5. De slingertijd van een fysische slinger wordt gegeven door $T_0 = 2\pi\sqrt{I/mg\ell}$, waarbij alle symbolen bekend verondersteld worden. Laat zien dat deze formule dimensioneel correct is.

Opgave 2. (potentialen, trillingen, 2+2+2+2+2 = 10)

Een deeltje met massa m beweegt in een 1-dimensionale potentiaalput gegeven door $V(x) = (x-a)^2$ voor $x < x_0$ en $V(x) = (x_0 - a)^2$ voor $x \geq x_0 > 2a$. Ook is $a > 0$.

a. Bereken en schets de kracht die het deeltje ondervindt voor $x \geq 0$ en het geval $x_0 = 3a$, en geeft de oscillatiefrequentie ω_0 waarmee het deeltje beweegt als het op $x = 0$ met snelheid $v = 0$ wordt losgelaten.

b. Het deeltje wordt op $x = 0$ met een snelheid v_0 (in de positieve x-richting) losgelaten. Gebruik de energievergelijking om de maximale snelheid van het deeltje te berekenen, en bereken de waarde voor x_0 waarmee het deeltje net aan de potentiaalput ontsnapt.

c. Nu wordt het deeltje op $t = 0$ losgelaten op positie $x = 0$ en met snelheid v_0 die zo gekozen is dat het deeltje gevangen blijft. De beweging is harmonisch, van de vorm $x = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$. Geef een uitdrukking voor φ in termen van de gegeven m, a en v_0.

d. Vervolgens wordt er demping aan het systeem toegevoegd, door een wrijvingskracht van de vorm $-|c_1|\, v$, dus lineair in de snelheid. Leidt een uitdrukking af voor de verandering van de energie per tijdseenheid dE/dt. Laat daarmee zien dat de energie exponentieel afneemt volgens $E = E_0 e^{(-2c_1 t)/m}$, waarbij E_0 de energie op $t = 0$ is.

e. Laat zien dat de limiet voor de positie van het deeltje voorbij x_0 gegeven wordt door $x_{\text{lim}} = x - x_0 = (mv_e)/c_1$, met $v_e = \sqrt{2E_0/m}$ de ontsnappingssnelheid, die op het moment van het ontsnappen aan de put.

Opgave 3. (rotaties, 2+2+2+2+2 = 10)

a. Gegeven drie deeltjes met massa m, posities $\vec{r}_1 = \hat{\imath} + \hat{\jmath},\ \vec{r}_2 = \hat{\jmath} + \hat{k},\ \vec{r}_3 = \hat{k}$, en snelheden $\vec{v}_1 = 2\hat{\imath}, \vec{v}_2 = \hat{\imath} + \hat{\jmath}, \vec{v}_3 = \hat{\imath} + 2\hat{k}$ .Bereken het draaimoment $\vec{L}$ en de kinetische energie van het systeem door directe sommatie.

b. Het traagheidsmoment I van een schijf met massa m en straal a om een as door de oorsprong en loodrecht op de schijf wordt gegeven door $I = ½\, m_{\text{schijf}}\, a^2$. Laat zien dat voor een bol met straal a en voor een as door de oorsprong, $I = 2/5\, m_{\text{bol}}\, a^2$.

c. Een haltervormig voorwerp bestaat uit twee bollen A en B, ieder met massa m en straal R, verbonden door een cilindervormige staaf met lengte 2R, en ook massa m. De afstand tussen de middelpunten van de bollen mag als 4R genomen worden. Bollen en staaf hebben dezelfde massadichtheid ρ. Geef het traagheidsmoment om een as die samenvalt met de cilinderas.

d. Geef het traagheidsmoment om een as loodrecht op de cilinderas en door het massamiddelpunt, voor het geval de staaf een lengte nul krijgt, dus als de bollen elkaar raken.

e. Een enkele bol met massa m en straal R rolt over de vloer met snelheid v_0. Geef een uitdrukking voor de kinetische energie T_K van de bol in termen van m en R. Bedenk dat je T_K de som is van de kinetische energie van het massamiddelpunt en de kinetische energie van de deeltjes t.o.v. het massamiddelpunt.

Opgave 4. (roterende assenstelsels, 2+2+2+3+3 = 11)

Voor formules, zie eind.
Op een schijf met straal b die draait met hoeksnelheid ω ligt een blokje met massa m op positie $b/2$ vanuit het centrum. Het blokje wordt op zijn plaats gehouden door een statische wrijvingskracht $|F_w| = \mu mg$.

a. Beschrijf de positie $\boldsymbol{r}$ van het blokje als functie van de tijd t in een niet-roterend coördinaten-stelsel met als oorsprong het centrum van de schijf. Leid hiermee een uitdrukking voor de *versnelling* van het blokje af. Geef in een schets de richting van de wrijvings*kracht* op het blokje aan.

b. Bepaal de snelheid $\vec{v}_0$ van het blokje in richting en absolute waarde, en laat zien dat die loodrecht op de versnelling staat.

c. Bepaal nu de *krachten* (echt en schijn) die werken in het roterend coordinatenstelsel dat ook de oorsprong op de as heeft, en schets hun richting. Bepaal de waarde van ω waarvoor het blokje nog net stil ligt.

d. Een wandelaar loopt langs de cirkel met straal $b/2$ met tangentiële snelheid v_t, tegen de rotatie in. In het roterend frame ondervindt hij een kracht $m\vec{a}'$. Ook is er een Corioliskracht. Bepaal voor beide de grootte en schets hun richting.

e. Een ijsdanser die om zijn / haar as draait ondergaat een hoekversnelling als de armen worden ingetrokken. Het model is dus twee massa's aan een dun touw die roteren om een centrale as en naar die as worden toegetrokken met een snelheid v. Bekijk dit in het roterend frame en schrijf de vergelijking op voor de *tangentiële* componenten van echte en schijnkrachten die op de massa's werken. Laat daarmee zien dat de hoekversnelling $\dot{\vec{\omega}}$ afhangt van de snelheid v. Laat zien dat dezelfde vergelijking volgt uit behoud van draaiimpuls.

De formule voor de versnelling in een stilstaand stelsel O, in termen van een roterend stelsel O', met hoeksnelheid **ω** en met O en O' op dezelfde positie.

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + 2\cancel{m}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}' + \cancel{m}\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') \qquad (1)$$

met alle 'geaccentueerde' grootheden gemeten in het bewegende assenstelsel.

De formule voor de krachten op een deeltje in een niet-inertiaalsysteem :

$$\mathbf{F} - m\mathbf{A_0} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') = m\boldsymbol{a}' \qquad (2)$$

met alle 'geaccentueerde' grootheden gemeten in het bewegende assenstelsel. **F** is een echte kracht, $\mathbf{A_0}$ is de versnelling van het bewegende assenstelsel, **ω** de hoeksnelheid van het bewegende assenstelsel. Je moet weten hoe de verschillende termen heten.

--- EINDE ---